Editora Bernoulli

MATEMÁTICA

Volume 05

Sumário - Matemática

Frente A

Frente B

Frente C

Frente D

Frente E

MATEMÁTICA

Combinações I

MÓDULO 09 FRENTE A

INTRODUÇÃO

Nos estudos anteriores, vimos os agrupamentos que diferem entre si pela ordem ou pela natureza dos seus elementos. Neste módulo, estudaremos agrupamentos que diferem entre si somente pela natureza dos seus elementos. Tais agrupamentos são conhecidos como combinações simples.

Como exemplo, consideremos o seguinte problema:

De quantos modos podemos formar uma comissão de 3 pessoas a partir de um grupo de 6 pessoas?

Seja {Antônio, Pedro, João, Thiago, Nelson, Patrícia} o grupo de 6 pessoas. Nota-se que as comissões {Antônio, Pedro, João} e {João, Antônio, Pedro} são idênticas, pois a mudança de ordem dos nomes não determina uma nova comissão. Já as comissões {João, Thiago, Patrícia} e {Nelson, Patrícia, Antônio} são diferentes, pois seus integrantes são diferentes.

Cada uma das comissões de três elementos gera 3! sequências, obtidas pela mudança da ordem dos seus elementos (permutações simples). Porém, como vimos anteriormente, cada uma dessas sequências se refere à mesma comissão. Ao calcularmos o total de grupos, considerando que a ordem é importante, temos $A_{6,\,3}$ grupos. A seguir, "descontamos" as permutações dos três elementos, dividindo o resultado obtido por 3!. As comissões obtidas são chamadas combinações simples, e são representadas por $C_{6,\,3}$.

Assim, temos $C_{6,\,3} = \dfrac{A_{6,\,3}}{3!} = 20$ comissões.

COMBINAÇÕES SIMPLES

Definição

Considere um conjunto com **n** elementos. Chamamos de combinações simples de **n** elementos, tomados **p** a **p**, os agrupamentos com **p** elementos de um conjunto **A** nos quais a ordem dos elementos não é importante. Os agrupamentos diferem entre si somente pela natureza dos seus elementos.

Assim, temos:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!.p!} \Rightarrow$$

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!.p!},\ n \geq p$$

OBSERVAÇÃO

As combinações simples de **n** elementos tomados **p** a **p**, em que $n \geq p$, podem ser representadas também nas formas C_n^p ou $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$.

Exemplos

1º) De quantos modos é possível formar uma comissão de 4 alunos a partir de um grupo de 7 alunos?

Resolução:

Trata-se de um problema de combinações simples de 7 elementos, tomados 4 a 4. Temos, portanto:

$$C_{7,\,4} = \frac{7!}{(7-4)!.4!} = \frac{7!}{3!.4!} = 35 \text{ modos}$$

2º) Quantos triângulos podem ser construídos a partir dos vértices de um hexágono convexo?

Resolução:

Sejam **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** os vértices do hexágono. Observe que os triângulos ABC e CBA são idênticos, ou seja, a ordem dos vértices não é importante. Trata-se, portanto, de um problema de combinações simples. Assim, temos:

$$C_{6,\,3} = \frac{6!}{3!.3!} = 20 \text{ triângulos}$$

3º) Uma escola possui 7 professores de Matemática, 5 professores de Português e 4 professores de Geografia. De quantos modos é possível formar uma comissão de 5 professores contendo 2 professores de Matemática, 2 professores de Português e 1 professor de Geografia?

Resolução:

Devemos escolher 2 entre 7 professores de Matemática ($C_{7,\,2}$), 2 entre 5 professores de Português ($C_{5,\,2}$) e 1 entre 4 professores de Geografia ($C_{4,\,1}$). Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$C_{7,\,2}.C_{5,\,2}.C_{4,\,1} = 21.10.4 = 840 \text{ modos}$$

4º) No início de uma festa, foram trocados 66 apertos de mão. Sabendo que cada pessoa cumprimentou uma única vez todas as outras, quantas pessoas havia na festa?

Resolução:

Seja **n** o número de pessoas na festa. Cada aperto de mão equivale a um grupo de 2 pessoas. Portanto, o total de apertos de mão é igual ao total de grupos de 2 pessoas obtidos a partir das **n** pessoas da festa, ou seja, $C_{n,\,2}$.

$$C_{n,\,2} = 66 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!.2!} = 66 \Rightarrow$$

$$\frac{n.(n-1).(n-2)!}{(n-2)!} = 132 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0$$

Resolvendo a equação anterior, temos n = –11 (não convém) e n = 12 (convém).

Portanto, havia 12 pessoas na festa.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG–2006) A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada. Nessas condições, de quantas maneiras distintas pode-se formar essa comissão?

A) 70
B) 35
C) 45
D) 55

02. (UFSCar-SP) A câmara municipal de um determinado município tem exatamente 20 vereadores, sendo que 12 deles apoiam o prefeito, e os outros são contra. O número de maneiras diferentes de se formar uma comissão contendo exatamente 4 vereadores situacionistas e 3 oposicionistas é

A) 27 720
B) 13 860
C) 551
D) 495
E) 56

03. (UFJF-MG–2009) De quantas maneiras podemos escolher 3 números naturais distintos entre os inteiros de 1 a 20, de modo que a soma dos números escolhidos seja ímpar?

A) 100
B) 360
C) 570
D) 720
E) 1 140

04. (UFJF-MG) Uma liga esportiva elaborou um campeonato de futebol que será disputado em dois turnos. Em cada turno, cada clube jogará exatamente uma partida contra cada um dos outros participantes. Sabendo que o total de partidas será de 306, o número de clubes que participarão do campeonato é igual a

A) 34
B) 18
C) 17
D) 12
E) 9

05. (FUVEST-SP) Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo 4 itens distintos cada um, para distribuir entre a população carente. Esses 4 itens devem ser escolhidos entre 8 tipos de produtos de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

A) 360
B) 420
C) 540
D) 600
E) 640

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFPE–2007) Admita que, em um exame com 10 questões, um estudante tem de escolher 8 questões para serem respondidas. Quantas escolhas o estudante fará, se ele deve responder à primeira ou à segunda questão, mas não a ambas?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

02. (UFV-MG) Na primeira fase de um campeonato de futebol, os times participantes são divididos em 8 grupos de **n** times. Se, em cada grupo, todos os times se enfrentam uma única vez, então o número de jogos realizados nessa fase é

A) n(n – 1)
B) 8n(n – 1)
C) 8n
D) 4n(n – 1)
E) 4n

03. (PUC RS) O número de jogos de um campeonato de futebol disputado por **n** clubes ($n \geq 2$), no qual todos se enfrentam uma única vez, é

A) $\frac{n^2 - n}{2}$
B) $\frac{n^2}{2}$
C) $n^2 - n$
D) n^2
E) n!

04. (UFC) O número **MÁXIMO** de pontos de interseção entre 10 circunferências distintas é

A) 100
B) 90
C) 45
D) 32
E) 20

05. (FUVEST-SP) Participam de um torneio de voleibol 20 times distribuídos em 4 chaves, de 5 times cada uma. Na 1ª fase do torneio, os times jogam entre si uma única vez (um único turno), todos contra todos em cada chave, sendo que os 2 melhores de cada chave passam para a 2ª fase. Na 2ª fase, os jogos são eliminatórios; depois de cada partida, apenas o vencedor permanece no torneio. Logo, o número de jogos necessários até que se apure o campeão do torneio é

A) 39
B) 41
C) 43
D) 45
E) 47

06. (Mackenzie-SP) Uma padaria faz sanduíches, segundo a escolha do cliente, oferecendo 3 tipos diferentes de pães e 10 tipos diferentes de recheios. Se o cliente pode escolher o tipo de pão e 1, 2 ou 3 recheios diferentes, o número de possibilidades de compor o sanduíche é

A) 525
B) 630
C) 735
D) 375
E) 450

07. (UFRJ) Um campeonato de futebol foi disputado por 10 equipes em um único turno, de modo que cada time enfrentou cada um dos outros apenas uma vez. O vencedor de uma partida ganha 3 pontos, e o perdedor não ganha ponto algum; em caso de empate, cada equipe ganha 1 ponto. Ao final do campeonato, tivemos a seguinte pontuação:

Equipe 1	20 pontos	Equipe 6	17 pontos
Equipe 2	10 pontos	Equipe 7	9 pontos
Equipe 3	14 pontos	Equipe 8	13 pontos
Equipe 4	9 pontos	Equipe 9	4 pontos
Equipe 5	12 pontos	Equipe 10	10 pontos

DETERMINE quantos jogos desse campeonato terminaram empatados.

08. (UFU-MG) Considere **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F** e **G** pontos num mesmo plano, tais que, entre esses pontos, não existam três que sejam colineares. Quantos triângulos podem ser formados com vértices dados por esses pontos, de modo que não existam triângulos de lado $\overline{AB}$, nem de lado $\overline{BC}$?

A) 34
B) 35
C) 26
D) 25

09. (PUC Minas) Sobre a reta **r**, tomam-se três pontos; sobre a reta **s**, paralela a **r**, tomam-se cinco pontos. Nessas condições, o número de triângulos distintos e com vértices nesses pontos é

A) 45
B) 46
C) 47
D) 48

10. (UFOP-MG) De quantas maneiras podemos distribuir 10 alunos em 2 salas de aula com 7 e 3 lugares, respectivamente?

A) 120
B) 240
C) 14 400
D) 86 400
E) 3 608 800

11. (UFJF-MG) Um programa de TV organizou um concurso e, na sua fase final, promoveu o confronto entre os finalistas, de modo que cada um deles se confrontava com cada um dos outros uma única vez. Se foram gravados 28 confrontos, é **CORRETO** afirmar que o número de finalistas foi

A) 2
B) 4
C) 7
D) 8
E) 14

12. (UEL-PR) São dados **n** pontos, dois a dois distintos entre si, 4 dos quais pertencem a uma reta **r**, e os demais encontram-se sobre uma reta paralela a **r**. Se podem ser construídos 126 quadriláteros com vértices nesses pontos, então **n** é um número

A) quadrado perfeito.
B) primo.
C) múltiplo de 7.
D) menor que 10.
E) maior que 15.

13. (VUNESP) Considere os algarismos 2, 3, 5, 7, 11. A quantidade total de números distintos que se obtêm multiplicando-se dois ou mais desses algarismos, sem repetição, é

A) 120
B) 52
C) 36
D) 26
E) 21

14. (ITA-SP) Um general possui **n** soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com **r** soldados e outro da retaguarda com **s** soldados (r + s = n), ele poderá dispor seus homens de

A) $\frac{n!}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

B) $\frac{n!}{r!.s!}$ maneiras distintas neste ataque.

C) $\frac{n!}{(r.s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

D) $\frac{2(n!)}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

E) $\frac{2(n!)}{r!.s!}$ maneiras distintas neste ataque.

15. (UFU-MG) Um sério problema enfrentado pelas autoridades de saúde é diagnosticar a chamada pneumonia asiática. Atualmente, são conhecidos 7 sintomas dessa doença. Se, em um paciente, forem detectados 5 ou mais desses possíveis sintomas, a doença é diagnosticada. Diante disso, pode-se afirmar que o número total de combinações distintas dos sintomas possíveis para que o diagnóstico da pneumonia asiática seja efetivo é igual a

A) 21
B) 29
C) 147
D) 210

16. (UFU-MG) Dez equipes disputaram um campeonato de futebol, sendo que cada equipe disputou exatamente duas partidas contra cada uma das demais equipes. De acordo com o regulamento do campeonato, em cada partida foram atribuídos três pontos ganhos para a equipe vencedora, nenhum ponto ganho para a equipe derrotada e, em caso de empate, um ponto ganho para cada uma das duas equipes. Sabendo-se que, ao final do campeonato, foi atribuído um total de 231 pontos ganhos às equipes, **DETERMINE** quantas partidas terminaram em vitória e quantas terminaram empatadas.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo **A**. Em seguida, entre os times do Grupo **A**, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo **A** e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

A) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
B) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
C) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
D) duas combinações.
E) dois arranjos.

02. Ao visitar uma cidade histórica, Adelson resolveu levar presentes para a sua família. Em um dos lados de uma rua, há 6 lojas de artesanato e, do outro, 4 lojas de roupas. Sabe-se que cada loja é especializada em um tipo de produto, não havendo a possibilidade de um mesmo item ser encontrado em mais de uma loja. Adelson deseja comprar 3 presentes, sendo apenas 1 em cada loja. Quantos grupos diferentes de presentes podem ser formados por Adelson, de modo que ele compre pelo menos um objeto de artesanato e pelo menos uma peça de roupa?

A) 24 B) 48 C) 72 D) 96 E) 108

GABARITO

Fixação

01. D 02. A 03. C 04. B 05. E

Propostos

01. B
02. D
03. A
04. B
05. E
06. A
07. 17
08. C
09. A
10. A
11. D
12. B
13. D
14. B
15. B
16. 51 vitórias e 39 empates

Seção Enem

01. A 02. D

MATEMÁTICA

MÓDULO 10 FRENTE A

Combinações II

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (CEFET-MG–2006) Num plano, existem vinte pontos dos quais três nunca são colineares, exceto seis, que estão sobre uma mesma reta. O número de retas determinadas pelos vinte pontos é

A) 150
B) 176
C) 185
D) 205
E) 212

Resolução:

Inicialmente, consideremos o total de grupos de dois pontos formado a partir dos vinte pontos. Depois, verificamos que, desse total de grupos, devemos subtrair os grupos formados a partir dos 6 pontos colineares. Em seguida, acrescentamos a própria reta, que contém os seis pontos. Assim, temos:

$$C_{20,\,2} - C_{6,\,2} + 1 = \frac{20!}{18!.2!} - \frac{6!}{4!.2!} + 1 = 176 \text{ retas}$$

02. (UFV-MG–2008) Uma equipe de futebol de salão de cinco membros é formada escolhendo-se os jogadores de um grupo **V**, com 7 jogadores, e de um grupo **W**, com 6 jogadores. O número de equipes diferentes que é possível formar de modo que entre seus membros haja, no mínimo, um jogador do grupo **W** é

A) 1 266
B) 1 356
C) 1 246
D) 1 376

Resolução:

Do total de equipes que podem ser formadas com os 13 jogadores (7 de **V** e 6 de **W**), subtraímos as equipes formadas apenas com jogadores do grupo **V**. Com isso, garantimos a presença de pelo menos um jogador do grupo **W**. Assim, temos:

$$C_{13,\,5} - C_{7,\,5} = \frac{13!}{8!.5!} - \frac{7!}{2!.5!} = 1\,266$$

03. (UFVJM-MG–2008) Considere a situação-problema em que, dos 12 funcionários de uma microempresa, 5 são mulheres, os trabalhos são realizados por comissões de três funcionários cada uma, e em nenhuma delas os 3 componentes são do mesmo sexo. Com base nessas informações, é correto afirmar que o número de maneiras de se compor essas comissões, com tais características, é igual a

A) 125
B) 155
C) 175
D) 165

Resolução:

Do total de comissões possíveis, subtraímos as comissões formadas apenas por homens e apenas por mulheres. Assim, temos:

$$C_{12,\,3} - C_{5,\,3} - C_{7,\,3} = \frac{12!}{9!.3!} - \frac{5!}{2!.3!} - \frac{7!}{4!.3!} = 175$$

04. (UFMG) Uma urna contém 12 bolas: 5 pretas, 4 brancas e 3 vermelhas. O número de maneiras possíveis de se retirar simultaneamente dessa urna um grupo de 6 bolas que contém pelo menos uma de cada cor é

A) 84
B) 252
C) 805
D) 924

Resolução:

Do total de grupos possíveis, retiramos os grupos formados apenas por duas cores, já que não é possível formar grupos com bolas de uma só cor. Portanto, temos:

Total de grupos: $C_{12,\,6} = \frac{12!}{6!.6!} = 924$

Apenas bolas pretas e brancas: $C_{9,\,6} = \frac{9!}{3!.6!} = 84$

Apenas bolas pretas e vermelhas: $C_{8,\,6} = \frac{8!}{2!.6!} = 28$

Apenas bolas brancas e vermelhas: $C_{7,\,6} = \frac{7!}{1!.6!} = 7$

Logo, o número de grupos é 924 – 84 – 28 – 7 = 805.

05. (CEFET-MG–2007) Em um bar, vende-se três tipos de cervejas: **S**, **B** e **K**. O número de maneiras diferentes que uma pessoa pode comprar quatro garrafas dessas cervejas é

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

Resolução:

Devemos determinar o número de maneiras de se distribuir 4 objetos idênticos (as cervejas) entre as três marcas **S**, **B** ou **K**. Adotaremos a seguinte ideia:

I. Inicialmente, escrevemos o 4 como uma sequência de quatro dígitos "1":

1 1 1 1 = 4

II. Consideramos dois "separadores", representados por barras ("|"), a fim de dividir a sequência em três partes. Por exemplo:

"1 | 1 1 | 1" indica uma cerveja **S**, duas **B** e uma **K**.

"1 1 | 1 1 |" indica duas cervejas **S**, duas **B** e zero **K**.

Portanto, há 6 caracteres considerados, a saber, quatro dígitos "1" e as duas barras. O número de maneiras de distribuir as cervejas é igual ao número de modos de posicionarmos os dois separadores nas 6 posições possíveis, ou seja:

$$C_{6,\,2} = \frac{6!}{4!.2!} = 15 \text{ maneiras}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (Mackenzie-SP) Num grupo de 10 pessoas temos somente 2 homens. O número de comissões de 5 pessoas que podemos formar com 1 homem e 4 mulheres é

A) 70
B) 84
C) 140
D) 210
E) 252

02. (UFES) Uma cidade atravessada por um rio tem 8 bairros situados em uma das margens do rio e 5 bairros situados na outra margem. O número de **POSSÍVEIS** escolhas de 1 bairro qualquer situado em qualquer uma das margens do rio e 3 bairros quaisquer situados na outra margem é

A) 280
B) 360
C) 480
D) 1 680
E) 2 160

03. (UFV-MG) Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é

A) 32
B) 28
C) 34
D) 26
E) 30

04. (FUVEST-SP–2006) Em uma certa comunidade, dois homens sempre se cumprimentam (na chegada) com um aperto de mão e se despedem (na saída) com outro aperto de mão. Um homem e uma mulher se cumprimentam com um aperto de mão, mas se despedem com um aceno. Duas mulheres só trocam acenos, tanto para se cumprimentarem quanto para se despedirem. Em uma comemoração, na qual 37 pessoas almoçaram juntas, todos se cumprimentaram e se despediram na forma descrita anteriormente. Quantos dos presentes eram mulheres, sabendo que foram trocados 720 apertos de mão?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

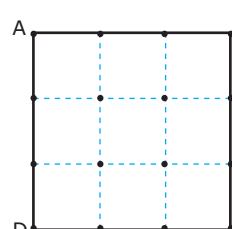
05. (FJP-MG–2008) O destacamento policial de uma pequena cidade é composto de um tenente (comandante), três sargentos, três cabos e doze soldados. O comandante precisa organizar uma patrulha composta de um sargento, um cabo e quatro soldados, escolhidos por sorteio. Os sargentos chamam-se Antônio, Pedro e João. O número de patrulhas diferentes que poderão ser organizadas sem a participação do sargento João é

A) 1 485
B) 1 890
C) 2 970
D) 3 455

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP–2007) Em uma classe de 9 alunos, todos se dão bem, com exceção de Andreia, que vive brigando com Manoel e Alberto. Nessa classe, será constituída uma comissão de cinco alunos, com a exigência de que cada membro se relacione bem com todos os outros. Quantas comissões podem ser formadas?

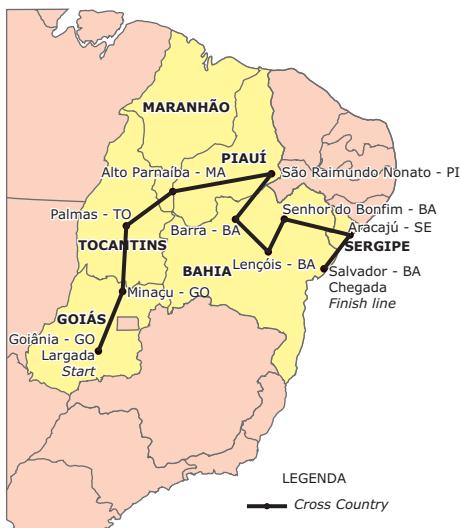
A) 71 B) 75 C) 80 D) 83 E) 87

02. (UFMG) O jogo de dominó possui 28 peças distintas. Quatro jogadores repartem entre si essas 28 peças, ficando cada um com 7 peças. De quantas maneiras distintas se pode fazer tal distribuição?

A) $\frac{28!}{7!.4!}$ B) $\frac{28!}{4!.24!}$ C) $\frac{28!}{(7!)^4}$ D) $\frac{28!}{7!.21!}$

03. (UFMG) A partir de um grupo de 14 pessoas, quer-se formar uma comissão de oito integrantes, composta de um presidente, um vice-presidente, um secretário, um tesoureiro e quatro conselheiros. Nessa situação, de quantas maneiras distintas se pode compor essa comissão?

A) $\frac{14!}{4!.6!}$ B) $\frac{14!}{(4!)^2}$ C) $\frac{14!}{6!.8!}$ D) $\frac{14!}{6!.10!}$

04. (Mackenzie-SP) A partir de um grupo de 10 pessoas, devemos formar **k** comissões de pelo menos dois membros, sendo que em todas deve aparecer uma determinada pessoa **A** do grupo. Então, **k** vale

A) 1 024
B) 512
C) 216
D) 511
E) 1 023

05. (UNIRIO-RJ) Um grupo de 9 pessoas, entre elas os irmãos João e Pedro, foi acampar. Na hora de dormir montaram 3 barracas diferentes, sendo que, na primeira, dormiram duas pessoas; na segunda, três pessoas; e, na terceira, as quatro restantes. De quantos modos diferentes eles podem se organizar, sabendo que a única restrição é a de que os irmãos João e Pedro não podem dormir na mesma barraca?

A) 1 260
B) 1 225
C) 1 155
D) 1 050
E) 910

06. (UEL-PR–2006) Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica um certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos para indicar seus membros. O partido **A** tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido **B** tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. Assinale a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI.

A) 55
B) (40 – 3).(15 – 1)
C) $\dfrac{40!}{37!.3!}.15$
D) 40.39.38.15
E) 40!.37!.15!

07. (FGV-SP–2008) O número de segmentos de reta que têm ambas as extremidades localizadas nos vértices de um cubo dado é

A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 28

08. (UFMG) Em uma viagem aérea, um passageiro tem, em sua bagagem, 20 livros diferentes, entre os quais um escrito em alemão e um dicionário de alemão. Desses livros, dez pesam 200 g cada um, seis pesam 400 g cada um e quatro, 500 g cada um. No entanto, ele só pode levar 2 kg de livros. Sabendo-se que pretende levar o livro em alemão e o dicionário, que pesam, respectivamente, 200 g e 500 g, de quantas maneiras distintas poderá obter esses 2 kg?

09. (FGV-SP–2007) Três números inteiros distintos de –20 a 20 foram escolhidos de forma que seu produto seja um número negativo. O número de maneiras diferentes de se fazer essa escolha é

A) 4 940
B) 4 250
C) 3 820
D) 3 640
E) 3 280

10. (UERJ) Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

I) Um entre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo.
II) Um entre os tamanhos: pequeno e grande.
III) De um até cinco entre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

CALCULE:

A) Quantos sanduíches distintos podem ser montados.
B) O número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

11. (ITA-SP–2007) Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

12. (UECE–2008) O conjunto {1 995, 1 996, 1 997, ..., 2 008} possui, exatamente, **X** subconjuntos com, no mínimo, 4 elementos. Assinale a alternativa na qual se encontra o valor de **X**.

A) 2^{10}
B) $2^4(2^{10} – 1)$
C) 20 020
D) 15 914

13. (Unifor-CE–2008) Três amigos irão ao teatro e seus ingressos permitem que escolham três poltronas, entre cinco pré-determinadas de uma mesma fila, para sentar-se. Nessas condições, de quantas maneiras distintas eles poderão se acomodar para assistir ao espetáculo?

A) 10 B) 12 C) 30 D) 45 E) 60

14. (UFC–2007) Escolhemos cinco números, sem repetição, entre os inteiros de 1 a 20. **CALCULE** quantas escolhas distintas podem ser feitas, sabendo que ao menos dois dos cinco números selecionados devem deixar um mesmo resto quando divididos por 5.

15. (UFMG) Um baralho é composto por 52 cartas divididas em quatro naipes distintos. Cada naipe é constituído por 13 cartas – 9 cartas numeradas de 2 a 10, mais Valete, Dama, Rei e Ás, representadas, respectivamente, pelas letras **J**, **Q**, **K** e **A**. Um par e uma trinca consistem, respectivamente, de duas e de três cartas de mesmo número ou letra. Um *full hand* é uma combinação de cinco cartas, formada por um par e uma trinca. Considerando essas informações, **CALCULE**:

1. De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis e uma trinca de 2.
2. De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand* com um par de reis.
3. De quantas maneiras distintas se pode formar um *full hand*.

16. (Mackenzie-SP–2008) Na figura, o quadrado ABCD é formado por 9 quadrados congruentes. O total de triângulos distintos, que podem ser construídos, a partir dos 16 pontos, é

A) 516
B) 520
C) 526
D) 532
E) 546

MATEMÁTICA

17. (UFJF-MG–2006) Um cientista recebeu 5 cobaias para usar em seu estudo sobre uma nova vacina. Seus cálculos indicaram que o número de maneiras **POSSÍVEIS** de escolher pelo menos 3 cobaias é

A) 10 B) 16 C) 50 D) 120 E) 60

SEÇÃO ENEM

01. Comprovou-se, pela 15ª edição do *Rally* Internacional dos Sertões, realizada em agosto de 2007, que esta é uma das provas mais importantes do mundo em termos do número de inscritos e do grau de dificuldade do percurso. No mapa a seguir, estão o roteiro do *rally*, que teve largada em Goiânia (GO) e chegada em Salvador (BA), e os diversos postos de controle, que são os pontos destacados, com exceção dos locais de largada e chegada.

Disponível em: <http://4.bp.blogspot.com/_nVcoxAcauyA/RpD4w0YOQiI/AAAAAAAAALw/IIW5lcLv9F4/s400/mapa_maior_2007.jpg>. Acesso em: 06 ago. 2010.

Todos os participantes da prova devem passar pelos postos de controle, onde é registrado o tempo que gastaram e é fornecido o apoio logístico necessário. Para cada posto, é necessária uma equipe de 4 ajudantes. Deseja-se selecionar equipes para os postos de controle localizados no estado da Bahia. Sabendo-se que há um total de 14 candidatos, o total de maneiras de se fazer essa seleção é igual a

A) $C_{14,\,4}.C_{10,\,4}.C_{6,\,4}$

B) $3.C_{14,\,4}$

C) $\dfrac{C_{14,\,4}.C_{10,\,4}}{2}$

D) $C_{14,\,4} + C_{10,\,4} + C_{6,\,4}$

E) $2.C_{14,\,4}$

02. Uma equipe de 5 cientistas deverá ser formada a partir de um grupo constituído por 7 biólogos, 8 físicos e 5 geólogos. Tal equipe deverá conter pelo menos um geólogo e pelo menos um físico. O total de maneiras distintas de se formar tal equipe é

A) 15 504
B) 11 730
C) 10 564
D) 9 868
E) 8 543

GABARITO

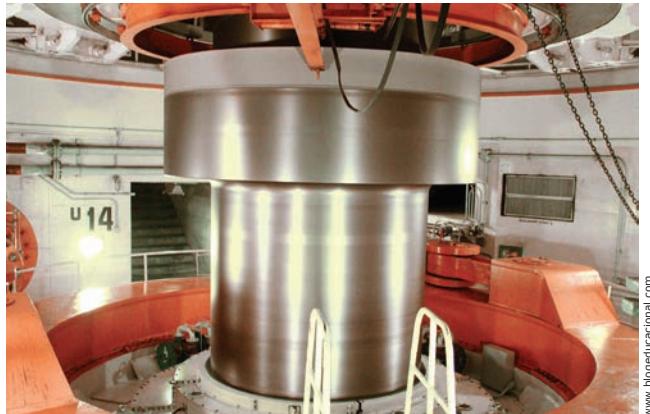
Fixação

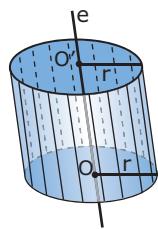
01. C 02. B 03. C 04. B 05. C

Propostos

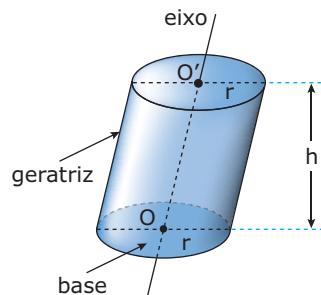
01. A
02. C
03. A
04. D
05. E
06. C
07. E
08. 1 071
09. A
10. A) 186
    B) 20
11. 125
12. D
13. E
14. 14 480
15. 1. $C_{4,\,2}.C_{4,\,3} = 24$
    2. $C_{4,\,2}.C_{4,\,3}.C_{12,\,1} = 288$
    3. $C_{13,\,1}.C_{4,\,2}.C_{12,\,1}.C_{4,\,3} = 3\,744$
16. A
17. B

Seção Enem

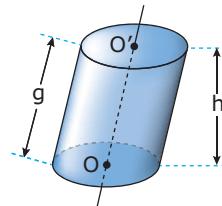
01. A
02. B

MATEMÁTICA

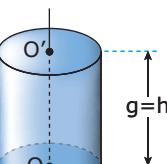
MÓDULO 09 FRENTE B

Cilindros

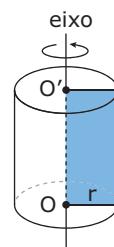
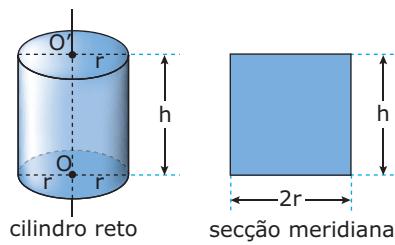
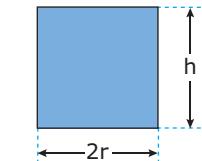
DEFINIÇÃO

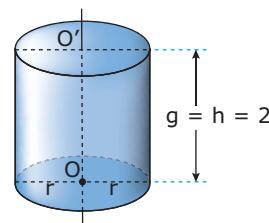
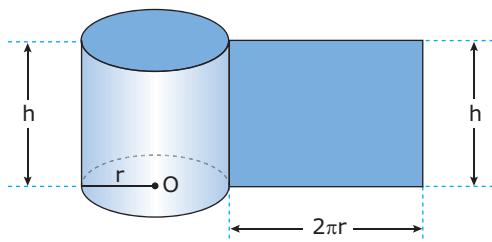
Considere dois círculos de mesmo raio, situados em dois planos paralelos, e a reta **e**, que passa pelos centros destes. Chama-se de cilindro circular a reunião dos segmentos paralelos à reta **e** que unem os dois círculos.

Podemos identificar em um cilindro circular os seguintes elementos:

Bases: círculos congruentes situados em planos paralelos.

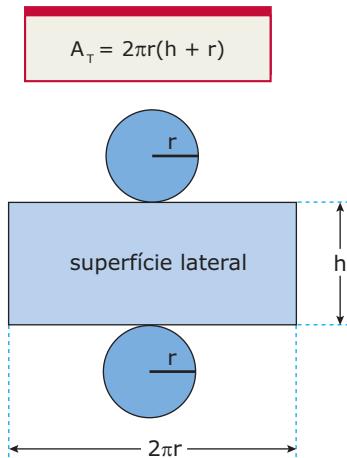
Eixo: é a reta determinada pelos centros das bases.

Geratrizes: são os segmentos, paralelos ao eixo, com extremidades nas circunferências das bases.

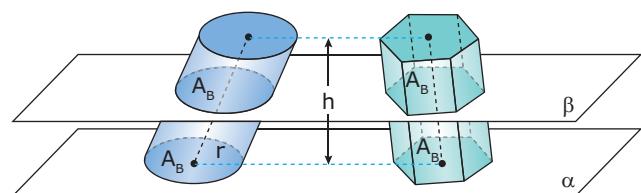
Altura: distância **h** entre os planos das bases.

NOMENCLATURA

Um cilindro circular pode ser oblíquo ou reto, de acordo com a posição relativa entre as geratrizes e os planos das bases.

Cilindro oblíquo

Cilindro reto (geratrizes perpendiculares às bases

O cilindro circular reto é também chamado cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.

Secção meridiana é a interseção do cilindro com um plano que contém a reta OO' determinada pelos centros das bases. A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.

Cilindro equilátero é um cilindro cuja secção meridiana é um quadrado, ou seja, a geratriz e a altura têm medidas iguais ao dobro da medida do raio da base do cilindro.

ÁREA LATERAL

Planificando a superfície lateral de um cilindro reto, obtemos um retângulo de dimensões $2\pi r$ e **h**. Logo, a superfície lateral de um cilindro circular reto é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e **h** (altura do cilindro).

Portanto, a área lateral do cilindro é:

ÁREA TOTAL

A área total de um cilindro é a soma da área lateral (A_ℓ) com as áreas das duas bases ($A_B = \pi r^2$); logo:

$$A_T = A_\ell + 2A_B \Rightarrow A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$A_T = 2\pi r(h + r)$$

VOLUME DO CILINDRO

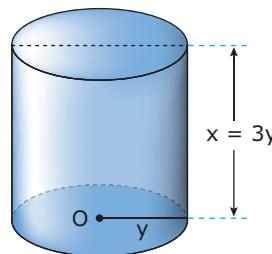
Consideremos um cilindro e um prisma, ambos de altura **h** e área da base A_B. Suponhamos que os dois sólidos possuam bases num mesmo plano $\boldsymbol{\alpha}$, como mostrado na figura a seguir:

Qualquer plano $\boldsymbol{\beta}$ paralelo a $\boldsymbol{\alpha}$ que secciona o prisma também secciona o cilindro, determinando secções de mesma área A_B. Podemos afirmar, então, que os dois sólidos têm volumes iguais.

$$V_{cilindro} = V_{prisma} = A_B.h$$

O volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.

Como $A_B = \pi r^2$, temos:

$$V = \pi r^2 h$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

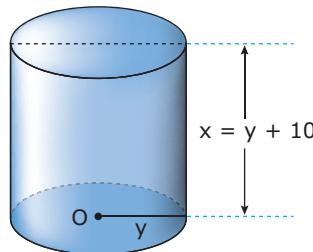
01. (UNESP) Considerar um cilindro circular reto de altura **x** cm e raio da base igual a **y** cm. Usando a aproximação $\pi = 3$, determinar **x** e **y** nos seguintes casos:

A) O volume do cilindro é 243 cm³ e a altura é igual ao triplo do raio.

B) A área da superfície lateral do cilindro é 450 cm² e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

Resolução:

A)

Como o volume do cilindro é 243 cm³, temos:

$V = A_B.H \Rightarrow 243 = \pi y^2.3y \Rightarrow 243 = 9.y^3 \Rightarrow$

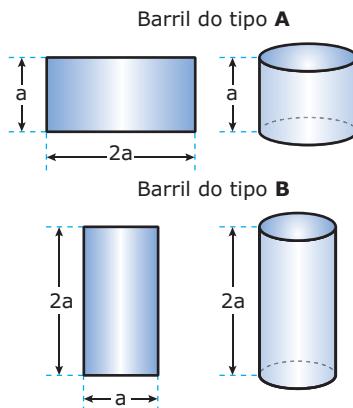
$y^3 = 27 \Rightarrow y = 3$ cm

Mas, $x = 3y \Rightarrow x = 9$ cm.

Portanto, $x = 9$ cm e $y = 3$ cm.

B)

Como a área lateral do cilindro é 450 cm², temos:

$A\ell = 2\pi y.x \Rightarrow 450 = 6.y.(y + 10) \Rightarrow$

$75 = y^2 + 10y \Rightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Rightarrow$

$y = 5$, pois $y > 0$

Logo, $x = y + 10 \Rightarrow x = 15$ cm.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (FUVEST-SP) Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, **A** e **B**, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados **a** e 2a, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado a seguir:

Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris dos tipos **A** e **B**, respectivamente, tem-se

A) $V_A = 2V_B$

B) $V_B = 2V_A$

C) $V_A = V_B$

D) $V_A = 4V_B$

E) $V_B = 4V_A$

02. (UFJF-MG) Aumentando-se o raio de um cilindro em 4 cm e mantendo-se a sua altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do cilindro original. Sabendo-se que a altura do cilindro original mede 1 cm, então o seu raio mede, em cm,

A) 1
B) 2
C) 4
D) 6

03. (UNESP–2009) A base metálica de um dos tanques de armazenamento de látex de uma fábrica de preservativos cedeu, provocando um acidente ambiental. Nesse acidente, vazaram 12 mil litros de látex. Considerando a aproximação $\pi = 3$, e que 1 000 litros correspondem a 1 m^3, se utilizássemos vasilhames na forma de um cilindro circular reto, com 0,4 m de raio e 1 m de altura, a quantidade de látex derramado daria para encher exatamente quantos vasilhames?

A) 12

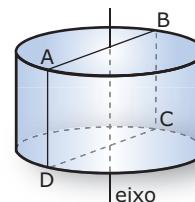
B) 20

C) 22

D) 25

E) 30

04. (UFSM-RS) Um suco de frutas é vendido em dois tipos de latas cilíndricas: uma lata L_1 de altura h_1 e raio r_1 e uma lata L_2 de altura h_2 e raio r_2 . A lata L_1 é vendida por R$ 1,50 e a lata L_2 é vendida por R$ 0,80. Assinale **VERDADEIRA (V)** ou **FALSA (F)** em cada uma das afirmações a seguir:

( ) Se $h_2 = 4h_1$ e $r_2 = \left(\frac{1}{2}\right)r_1$, é mais econômico comprar a lata L_2.

( ) Se $h_2 = 2h_1$ e $r_2 = \left(\frac{1}{2}\right)r_1$, é mais econômico comprar a lata L_1.

( ) Se $h_2 = \left(\frac{3}{2}\right)h_1$ e $r_2 = \left(\frac{2}{3}\right)r_1$, é mais econômico comprar a lata L_1.

A sequência **CORRETA** é

A) V V F.
B) F V F.
C) V F V.
D) V V V.
E) F F V.

05. (UFMG) Num cilindro de 5 cm de altura, a área da base é igual à área de uma seção por um plano que contém o eixo do cilindro, tal como a seção ABCD na figura a seguir:

O volume desse cilindro é de

A) $\frac{250}{\pi}$ cm³.

B) $\frac{500}{\pi}$ cm³.

C) $\frac{625}{\pi}$ cm³.

D) $\frac{125}{\pi}$ cm³.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG) Um aquário cilíndrico, com 30 cm de altura e área da base igual a 1 200 cm², está com água até a metade de sua capacidade. Colocando-se pedras dentro desse aquário, de modo que fiquem totalmente submersas, o nível da água sobe para 16,5 cm. Então, o volume das pedras é

A) 1 200 cm³.
B) 2 100 cm³.
C) 1 500 cm³.
D) 1 800 cm³.

02. (UFOP-MG) Num cilindro circular reto, o raio da base e a altura medem $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm e $\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Então, podemos afirmar que o valor de sua área lateral, em cm^2, é

A) π

B) $\sqrt{6}\pi$

C) 2π

D) $\sqrt{2}\pi$

E) $\frac{6}{\sqrt{3}}\pi$

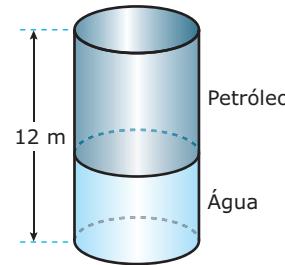
03. (UFRRJ) Carlos é um rapaz viciado em beber refrigerante *diet*. Um dia, voltando do trabalho, ele passou em frente a uma companhia de gás, em que viu um enorme reservatório cilíndrico de 3 metros de altura com uma base de 2 metros de diâmetro e pensou... "Em quanto tempo eu beberia aquele reservatório inteiro, se ele estivesse cheio de refrigerante *diet*?" Considerando π = 3,14 e sabendo-se que Carlos bebe 3 litros de refrigerante *diet* por dia, pode-se afirmar que ele consumiria todo o líquido do reservatório em um período de

A) 86 dias.

B) 86 meses.

C) 86 anos.

D) 8,6 anos.

E) 860 meses.

04. (UNESP) Se quadruplicarmos o raio da base de um cilindro, mantendo a sua altura, o volume do cilindro fica multiplicado por

A) 16

B) 12

C) 8

D) 4

E) 4π

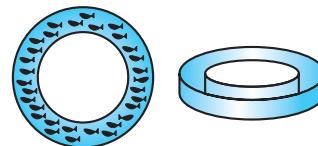
05. (UFJF-MG) Uma certa marca de leite em pó era vendida em uma embalagem, completamente cheia, no formato de um cilindro circular reto de altura 12 cm e raio da base 5 cm, pelo preço de R$ 4,00. O fabricante alterou a embalagem, aumentando em 2 cm a altura e diminuindo em 1 cm o raio da base, mas manteve o preço por unidade. Então, na realidade, o preço do produto

A) diminuiu.

B) se manteve estável.

C) aumentou entre 10% e 20%.

D) aumentou entre 20% e 30%.

E) aumentou entre 30% e 40%.

06. (UNESP) Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com 30 m^3 de água e 42 m^3 de petróleo.

Se a altura do tanque é 12 metros, a altura, em metros, da camada de petróleo é

A) 2π

B) 7

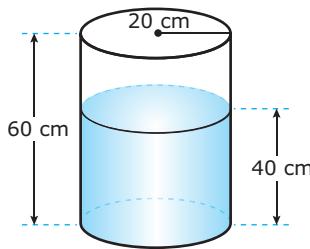
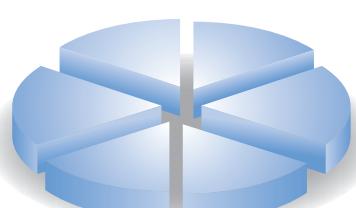
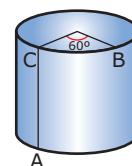
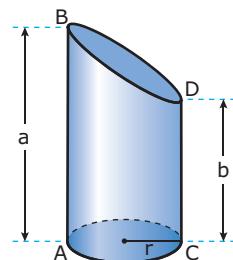
C) $\frac{7\pi}{3}$

D) 8

E) $\frac{8\pi}{3}$

07. (UFAL) Na figura a seguir têm-se duas vistas de um tanque para peixes, construído em uma praça pública.

Suas paredes são duas superfícies cilíndricas com altura de 1,2 m e raios da base medindo 3 m e 4 m. Se, no momento, a água no interior do tanque está alcançando $\frac{3}{4}$ de sua altura, quantos litros de água há no tanque?

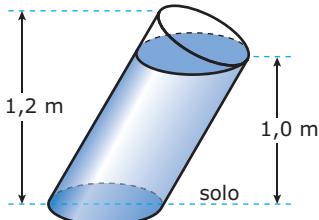
$\left(\text{Use: } \pi = \frac{22}{7}\right)$

A) 1 980

B) 3 300

C) 6 600

D) 19 800

E) 66 000

08. (UFPE) Qual das propostas a seguir pode ser utilizada para duplicar o volume de um cilindro modificando seu raio da base e sua altura?

A) Duplicar o raio e manter a altura.

B) Aumentar a altura em 50% e manter o raio.

C) Aumentar o raio em 50% e manter a altura.

D) Duplicar o raio e reduzir a altura à metade.

E) Duplicar a altura e reduzir o raio à metade.

09. (Fatec-SP) Um tanque para depósito de combustível tem a forma cilíndrica de dimensões: 10 m de altura e 12 m de diâmetro. Periodicamente é feita a conservação do mesmo, pintando-se sua superfície lateral externa. Sabe-se que com uma lata de tinta pintam-se 14 m^2 da superfície. Nessas condições, é verdade que a **MENOR** quantidade de latas que será necessária para a pintura da superfície lateral do tanque é

A) 14 B) 23 C) 27 D) 34 E) 54

10. (UFRN) Um fabricante de doces utiliza duas embalagens, **X** e **Y**, para acondicionar seus produtos. A primeira **X** tem formato de um cubo com aresta de 9 cm, e a segunda **Y** tem formato de um cilindro reto, cujas medidas da altura e do diâmetro da base medem, cada uma, 10 cm. Sendo assim, podemos afirmar que

A) a área total da embalagem **Y** é $\frac{3}{5}$ da área total da embalagem **X**.

B) o volume da embalagem **Y** é $\frac{3}{4}$ do volume da embalagem **X**.

C) a área total da embalagem **X** é menor que a área total da embalagem **Y**.

D) o volume da embalagem **X** é menor que o volume da embalagem **Y**.

11. (UERJ) Um recipiente cilíndrico de 60 cm de altura e base com 20 cm de raio está sobre uma superfície plana horizontal e contém água até a altura de 40 cm, conforme indicado na figura.

Imergindo-se totalmente um bloco cúbico no recipiente, o nível da água sobe 25%. Considerando π igual a 3, a medida, em cm, da aresta do cubo colocado na água é igual a

A) $10\sqrt{2}$

B) $10\sqrt[3]{2}$

C) $10\sqrt{12}$

D) $10\sqrt[3]{12}$

12. (UFJF-MG) Um certo produtor rural fabrica queijos no formato de cilindro circular reto de 15 cm de raio da base e 5 cm de altura. Depois, esses queijos são cortados em 6 pedaços iguais, cujas bases têm o formato de setor circular (como ilustra a figura), e cada pedaço é embalado com papel alumínio. **RESPONDA**, justificando sua resposta, se uma folha retangular de papel alumínio, com 30 cm de largura por 15 cm de comprimento, possui papel suficiente para cobrir a superfície total de um desses pedaços de queijo.

13. (UFV-MG–2008) Um homem utiliza um balde cilíndrico, de 30 cm de diâmetro da base e 35 cm de altura, para pegar água numa fonte com o objetivo de encher um tanque de volume $V_T = 264\,600\pi$ cm^3. Cada vez que vai à fonte, ele enche $\frac{4}{5}$ do balde de água e no caminho derrama 10% deste conteúdo. Estando o tanque inicialmente vazio, o número de viagens à fonte que o homem terá que trazer para que a água no tanque atinja $\frac{6}{7}$ do volume V_T é

A) 40 B) 50 C) 30 D) 20

14. (UFV-MG) Deseja-se construir um recipiente fechado em forma de um cilindro circular reto com área lateral 144π m^2 e a altura de 12 m.

A) **DETERMINE** o volume do recipiente.

B) Supondo que o metro quadrado do material a ser utilizado custa R$ 10,00, **CALCULE** o valor gasto na construção do recipiente. (Considere $\pi = 3{,}14$)

15. (UNESP) Considere uma lata cilíndrica de raio **r** e altura **h** completamente cheia de um determinado líquido. Esse líquido deve ser distribuído totalmente em copos também cilíndricos, cuja altura é um quarto da altura da lata e cujo raio é dois terços do raio da lata.

DETERMINE

A) os volumes da lata e do copo, em função de **r** e **h**.

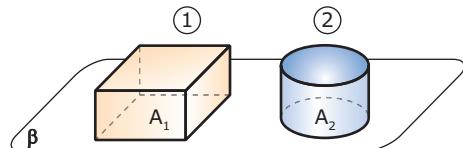
B) o número de copos necessários, considerando que os copos serão totalmente cheios com o líquido.

16. (UFPE) Na figura a seguir, os pontos **A** e **B** estão nos círculos das bases de um cilindro reto de raio da base $\frac{15}{\pi}$ e altura 12. Os pontos **A** e **C** pertencem a uma geratriz do cilindro e o arco BC mede 60 graus. Qual a **MENOR** distância entre **A** e **B** medida sobre a superfície do cilindro?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

17. (Unicamp-SP) Um cilindro circular reto é cortado por um plano não paralelo à sua base, resultando no sólido ilustrado na figura a seguir. **CALCULE** o volume desse sólido em termos do raio da base **r**, da altura máxima AB = a e da altura mínima CD = b. **JUSTIFIQUE** seu raciocínio.

MATEMÁTICA

18. (UNIFESP–2006) A figura indica algumas das dimensões de um bloco de concreto formado a partir de um cilindro circular oblíquo, com uma base no solo, e de um semicilindro. Dado que o raio da circunferência da base do cilindro oblíquo mede 10 cm, o volume do bloco de concreto, em cm^3, é

A) $11\ 000\pi$

B) $10\ 000\pi$

C) $5\ 500\pi$

D) $5\ 000\pi$

E) $1\ 100\pi$

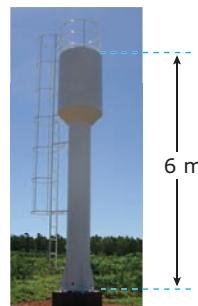
19. (UFOP-MG–2008) Um recipiente cilíndrico, com graduação, na altura, em centímetros, está cheio de água até a marca 30. Imerge-se nele uma pedra, elevando-se o nível da água para 40. O raio da base do recipiente mede 8 cm e a densidade da pedra é 2 kg/L (quilogramas por litro). Considerando $\pi = 3,1$, a massa da pedra, em quilogramas, está **MAIS PRÓXIMA** de

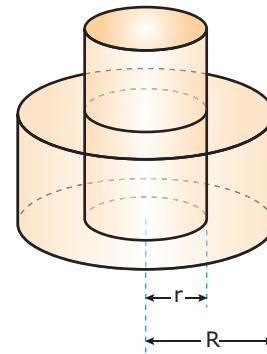
A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Em uma padaria, há dois tipos de forma de bolo, formas 1 e 2, como mostra a figura a seguir:

Sejam **L** o lado da base da forma quadrada, **r** o raio da base da forma redonda, A_1 e A_2 as áreas das bases das formas 1 e 2, e V_1 e V_2 os seus volumes, respectivamente. Se as formas têm a mesma altura **h**, para que elas comportem a mesma quantidade de massa de bolo, qual é a relação entre **r** e **L**?

A) $L = r$

B) $L = 2r$

C) $L = \pi r$

D) $L = r\sqrt{\pi}$

E) $L = \frac{\pi r^2}{2}$

02. (Enem–2008) A figura a seguir mostra um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto, com 6 m de altura. Quando está completamente cheio, o reservatório é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo consumo médio diário é de 500 litros de água.

Suponha que, um certo dia, após uma campanha de conscientização do uso da água, os moradores das 900 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito economia de 10% no consumo de água. Nessa situação,

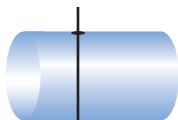
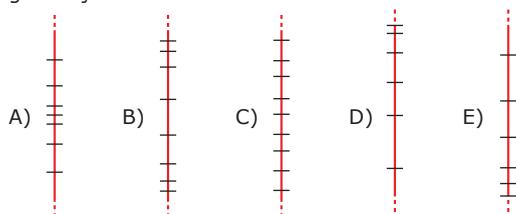
A) a quantidade de água economizada foi de 4,5 m^3.

B) a altura do nível da água que sobrou no reservatório, no final do dia, foi igual a 60 cm.

C) a quantidade de água economizada seria suficiente para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo diário fosse de 450 litros.

D) os moradores dessas casas economizariam mais de R$ 200,00, se o custo de 1 m^3 de água para o consumidor fosse igual a R$ 2,50.

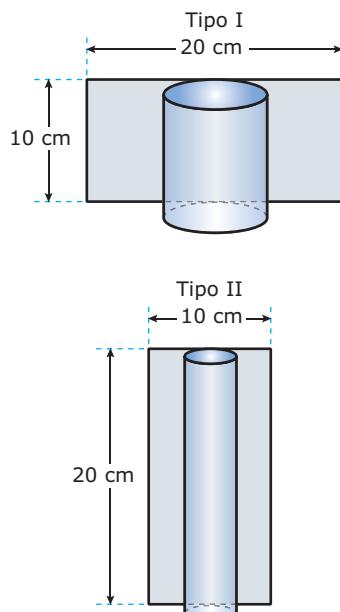
E) um reservatório de mesma forma e altura, mas com raio da base 10% menor que o representado, teria água suficiente para abastecer todas as casas.

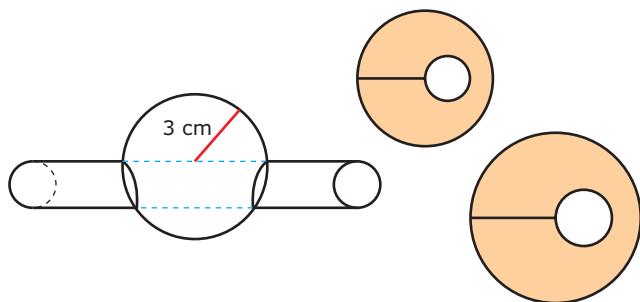
03. (Enem–2009) Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio **r** e altura h_1 e o outro de raio **R** e altura h_2. O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro.

Se $R = r\sqrt{2}$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$ e, para encher o cilindro do meio, foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários

A) 20 minutos.

B) 30 minutos.

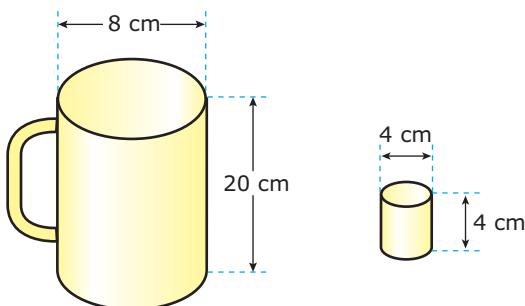
C) 40 minutos.

D) 50 minutos.

E) 60 minutos.

04. (Enem–2000) Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.

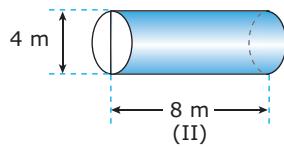
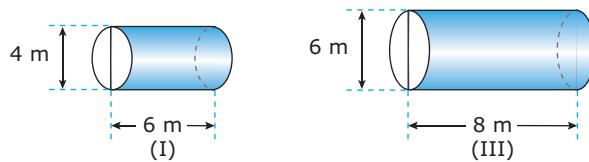
A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:

05. (Enem–2006) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras a seguir). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

A) o triplo.
B) o dobro.
C) igual.
D) a metade.
E) a terça parte.

06. (Enem 2009) Um chefe de cozinha utiliza um instrumento cilíndrico afiado para retirar parte do miolo de uma laranja. Em seguida, ele fatia toda a laranja em secções perpendiculares ao corte feito pelo cilindro. Considere que o raio do cilindro e da laranja sejam iguais a 1 cm e a 3 cm, respectivamente.

A área da maior fatia possível é

A) duas vezes a área da secção transversal do cilindro.
B) três vezes a área da secção transversal do cilindro.
C) quatro vezes a área da secção transversal do cilindro.
D) seis vezes a área da secção transversal do cilindro.
E) oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

07. (Enem–2010) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.

Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade miníma de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
C) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

08. (Enem–2010) Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível) foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a

A) R$ 230,40.

B) R$ 124,00.

C) R$ 104,16.

D) R$ 54,56.

E) R$ 49,60.

09. (Enem–2010) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento. Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi \cong 3$)

A) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

B) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

C) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

D) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

E) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

GABARITO

Fixação

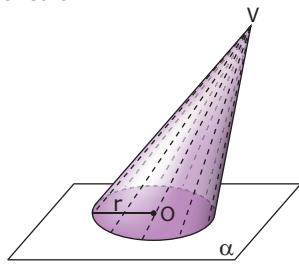
01. A 02. B 03. D 04. A 05. B

Propostos

01. D
02. E
03. D
04. A
05. E
06. B
07. D
08. D
09. C
10. D
11. D
12. Não
13. A
14. A) 432π m^3
    B) R$ 6 782,40
15. A) V(lata) = $\pi r^2 h$
    V(copo) = $\frac{\pi r^2 h}{9}$
    B) 9 copos
16. D
17. $V = \frac{\pi r^2(a+b)}{2}$
18. A
19. B

Seção Enem

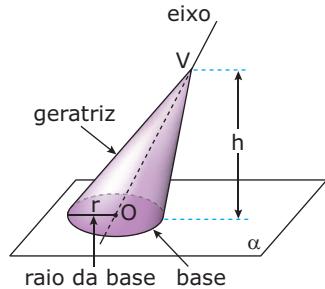
01. D
02. B
03. C
04. A
05. B
06. E
07. A
08. D
09. D

MATEMÁTICA

MÓDULO 10 FRENTE B

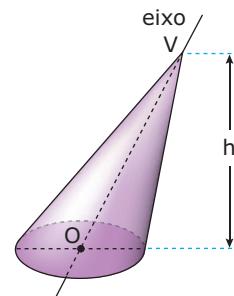
Cones

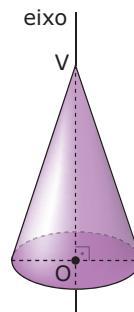
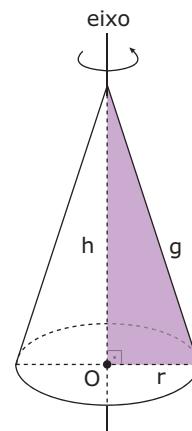
DEFINIÇÃO

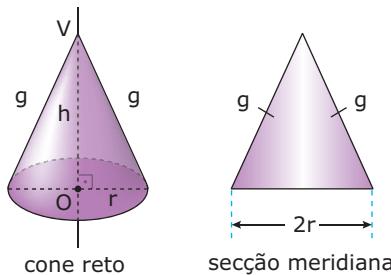
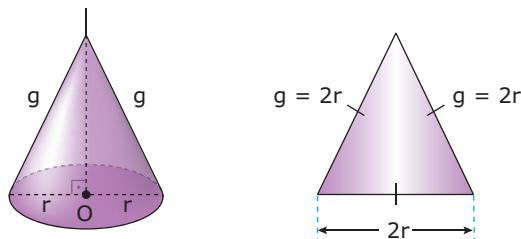
Considere um círculo de centro **O** e raio **r** situado num plano **α** e um ponto **V** fora de **α**. Chama-se cone circular a reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em **V** e a outra no círculo.

Podemos identificar em um cone circular os seguintes elementos:

Base: o círculo de centro **O** e raio **r**.

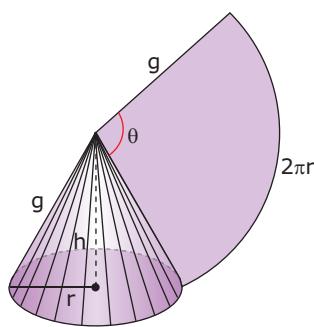
Vértice: o ponto **V**.

Geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em **V** e a outra na circunferência da base.

Altura: distância entre o vértice do cone e o plano da base.

Eixo: é a reta que contém o vértice e o centro da base.

NOMENCLATURA

Se o eixo do cone é oblíquo ao plano da base, temos um cone circular oblíquo.

Se o eixo do cone é perpendicular ao plano da base, temos um cone circular reto.

O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

$$g^2 = h^2 + r^2$$

Secção meridiana é a interseção do cone com um plano que contém o seu eixo. A secção meridiana de um cone circular reto ou cone de revolução é um triângulo isósceles.

cone reto   secção meridiana

Cone equilátero é um cone cuja secção meridiana é um triângulo equilátero $\left(g = 2r \text{ e } h = r\sqrt{3}\right)$.

ÁREA LATERAL

Planificando a superfície lateral de um cone reto, obtemos um setor circular de raio **g** (geratriz) e cujo arco correspondente mede $2\pi r$. Logo, a superfície lateral de um cone reto de raio de base **r** e geratriz **g** é equivalente a um setor circular de raio **g** e comprimento do arco $2\pi r$.

A área lateral do cone reto pode, então, ser calculada por uma simples proporção:

Comprimento do arco	Área do setor
$2\pi g$ ______________	πg^2
$2\pi r$ ______________	A_ℓ

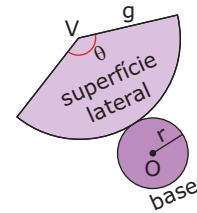
Daí, temos:

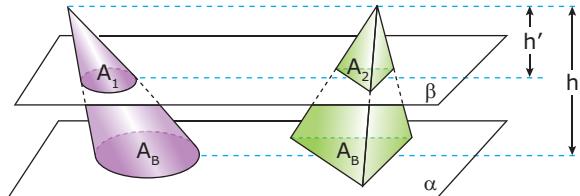
$$A_\ell = \frac{2\pi r.\pi g^2}{2\pi g} \Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi r g}$$

Para determinarmos o ângulo **θ**, fazemos uma outra proporção:

Comprimento do arco	Ângulo
$2\pi g$ ______________	2π rad ou 360º
$2\pi r$ ______________	θ

Daí, temos:

$$\boxed{\theta = \frac{2\pi r}{g}\text{ rad}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta = \frac{360\,r}{g}\text{ graus}}$$

ÁREA TOTAL

A área total de um cone é a soma da área lateral (A_ℓ) com a área da base (A_B); logo:

$$A_T = A_\ell + A_B \Rightarrow A_T = \pi rg + \pi r^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A_T = \pi r(g + r)}$$

VOLUME DO CONE

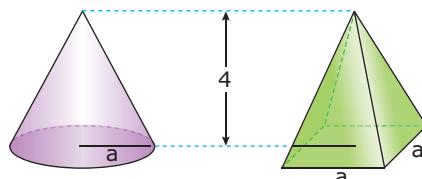
Consideremos um cone e um tetraedro, ambos de altura **h** e área da base A_B. Suponhamos que os dois sólidos possuam bases em um mesmo plano **α**, como mostrado na figura a seguir:

Qualquer plano **β** paralelo a **α** que secciona o cone também secciona o tetraedro. Sendo as áreas das secções A_1 e A_2, respectivamente, temos:

$$\frac{A_1}{A_B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{A_2}{A_B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Logo, $A_1 = A_2$, para todo plano **β** paralelo a **α**. Então, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$\boxed{V_{cone} = V_{tetraedro} = \frac{1}{3}.A_B.h}$$

O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Como $A_B = \pi r^2$, temos:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC RS) O raio da base de um cone circular reto e a aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular têm mesma medida. Sabendo que suas alturas medem 4 cm, então a razão entre o volume do cone e o da pirâmide é

A) 1

B) 4

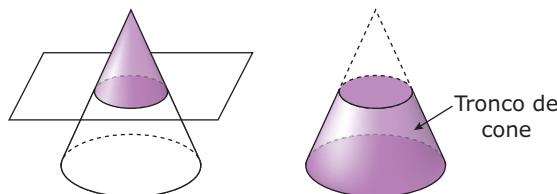
C) $\frac{1}{\pi}$

D) π

E) 3π

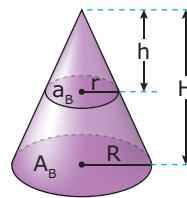
Resolução:

Sejam **a** o raio da base do cone e **a** a aresta da base da pirâmide.

Sejam V_c e V_p o volume do cone e da pirâmide, respectivamente. Logo:

$$V_c = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}\pi a^2 4 = \frac{4}{3}\pi a^2 \text{ e}$$

$$V_p = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}a^2 4 = \frac{4}{3}a^2$$

$$\text{Daí, } \frac{V_c}{V_p} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^2}{\frac{4}{3}a^2} = \pi$$

TRONCO DE CONE

Seccionando-se um cone por um plano paralelo à base, obtemos um sólido denominado tronco de cone. Veja:

O novo cone e o cone primitivo têm bases semelhantes, e os elementos lineares homólogos (raios das bases, geratrizes, alturas, etc.) são proporcionais. Assim, dizemos que eles são semelhantes.

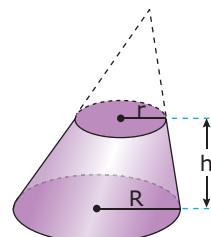
Razão de semelhança

Dados dois cones semelhantes, a razão entre dois elementos lineares homólogos é denominada razão de semelhança. Essa razão será representada por **k**.

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = k$$

Para razões entre áreas homólogas, temos:

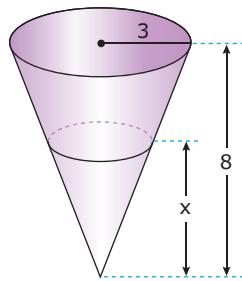
$$\frac{A_B}{a_B} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = k^2$$

Para razões entre volumes dos cones semelhantes, em que **V** e **v** são os volumes dos cones grande e pequeno, respectivamente, temos:

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}.A_B.H}{\frac{1}{3}.a_B.h} = \frac{A_B}{a_B}.\frac{H}{h} = k^2.k = k^3$$

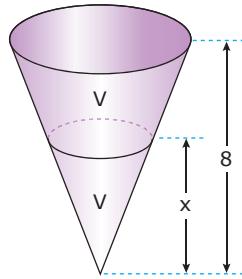
Podemos, então, generalizar da seguinte maneira:

i) A razão entre áreas homólogas de quaisquer dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

ii) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Volume do tronco de cone

Dados o raio **R** da base maior, o raio **r** da base menor e **h** a medida da altura do tronco, o volume do tronco de cone pode ser obtido por meio da fórmula:

$$V_T = \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2]$$

MATEMÁTICA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (FUVEST-SP) Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura **x** atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser

A) $\frac{8}{3}$ cm.

B) 6 cm.

C) 4 cm.

D) $4\sqrt{3}$ cm.

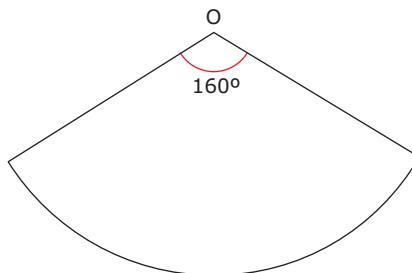
E) $4\sqrt[3]{4}$ cm.

Resolução:

Chamamos de **V** o volume de suco e de água.

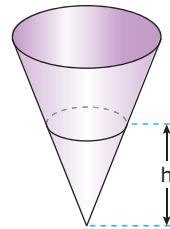
O volume do cone grande é, então, 2V.

Como os cones das figuras são semelhantes, então a razão entre os seus volumes é igual ao cubo da razão entre as alturas. Assim, temos:

$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{8}{x}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = 4\sqrt[3]{4} \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFJF-MG) O vinho contido em uma jarra cilíndrica será servido em cálices em forma de cone. A altura de cada cálice é $\frac{1}{4}$ da altura da jarra e o diâmetro da circunferência que forma a sua borda é $\frac{2}{3}$ do diâmetro da base da jarra. **DETERMINE** o número de cálices necessários para que o vinho seja todo servido de uma só vez.

02. (UFC–2009) Ao seccionarmos um cone circular reto por um plano paralelo a sua base, cuja distância ao vértice do cone é igual a um terço da sua altura, obtemos dois sólidos: um cone circular reto S_1 e um tronco de cone S_2.

A relação $\frac{\text{volume}(S_2)}{\text{volume}(S_1)}$ é igual a

A) 33 B) 27 C) 26 D) 9 E) 3

03. (Mackenzie-SP) Planificando a superfície lateral de um cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro **O** e raio 18 cm. Dos valores a seguir, o **MAIS PRÓXIMO** da altura desse cone é

A) 12 cm.

B) 18 cm.

C) 14 cm.

D) 16 cm.

E) 20 cm.

04. (UFMG) Um tanque de água tem a forma de um cone circular reto, com seu vértice apontando para baixo. O raio do topo é igual a 9 m e a altura do tanque é de 27 m. Pode-se afirmar que o volume **V** da água no tanque, como função da altura **h** da água, é

A) $V = \frac{\pi h^3}{27}$

B) $V = \frac{\pi h^3}{9}$

C) $V = \frac{\pi h^3}{3}$

D) $V = 3\pi h^3$

E) $V = 9\pi h^3$

05. (PUC-SP–2006) Considere o triângulo isósceles ABC, tal que AB = BC = 10 cm e CA = 12 cm. A rotação desse triângulo em torno de um eixo que contém o lado $\overline{AB}$ gera um sólido, cujo volume, em centímetros cúbicos, é

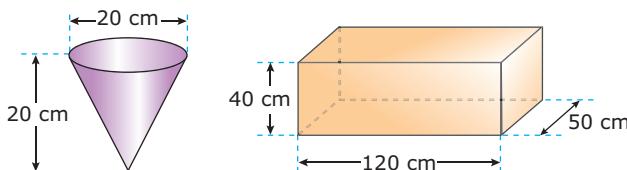
A) 256π

B) 298,6π

C) 307,2π

D) 316π

E) 328,4π

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG) Um cone é construído de forma que

I) sua base é um círculo inscrito em uma face de um cubo de lado **a**.

II) seu vértice coincide com um dos vértices do cubo localizado na face oposta àquela em que se encontra a sua base.

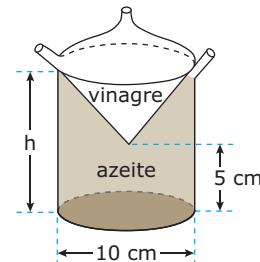
Dessa maneira, o volume do cone é de

A) $\frac{\pi a^3}{6}$

B) $\frac{\pi a^3}{12}$

C) $\frac{\pi a^3}{9}$

D) $\frac{\pi a^3}{3}$

02. (UFJF-MG–2008) Fernando utiliza um recipiente, em forma de um cone circular reto, para encher com água um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo. As dimensões do cone são: 20 cm de diâmetro de base e 20 cm de altura, e as do aquário são: 120 cm, 50 cm e 40 cm, conforme ilustração a seguir.

Cada vez que Fernando enche o recipiente na torneira do jardim, ele derrama 10% de seu conteúdo no caminho e despeja o restante no aquário. Estando o aquário inicialmente vazio, qual é o número mínimo de vezes que Fernando deverá encher o recipiente na torneira para que a água despejada no aquário atinja $\frac{1}{5}$ de sua capacidade?

03. (UFOP-MG) Um reservatório de água com a forma de um cone circular reto tem 8 m de altura e, sua base, 3 m de raio. Se a água ocupa 40% da capacidade total do reservatório, o volume de água nele contido é

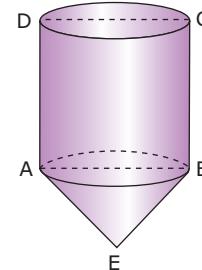
A) 960π litros.

B) 4 800π litros.

C) 2 400π litros.

D) 9 600π litros.

E) 96 000π litros.

04. (UFSCar-SP) A figura representa um galheteiro para a colocação de azeite e vinagre em compartimentos diferentes, sendo um cone no interior de um cilindro.

Considerando **h** como a altura máxima de líquido que o galheteiro comporta e a razão entre a capacidade total de azeite e vinagre igual a 5, o valor de **h** é

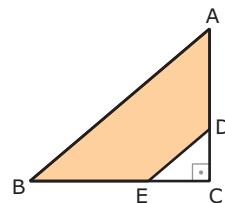
A) 7 cm.

B) 8 cm.

C) 10 cm.

D) 12 cm.

E) 15 cm.

05. (UFPE) Um cone reto tem altura $12\sqrt[3]{2}$ cm e está cheio de sorvete. Dois amigos vão dividir o sorvete em duas partes de mesmo volume, usando um plano paralelo à base do cone. Qual deverá ser a altura do cone menor assim obtido?

A) 12 cm

B) $12\sqrt{2}$ cm

C) $12\sqrt{3}$ cm

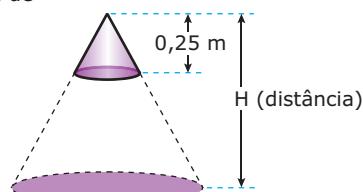
D) $10\sqrt{2}$ cm

E) $10\sqrt{3}$ cm

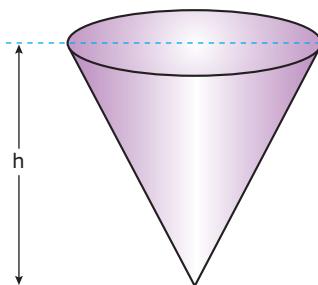
06. (Mackenzie-SP) No sólido da figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e AE = BE = $\sqrt{10}$. O volume desse sólido é

A) $\frac{5\pi}{2}$ B) $\frac{4\pi}{3}$ C) 4π D) 5π E) 3π

07. (PUC Minas) Na figura, os triângulos retângulos Δ ABC e Δ CDE são isósceles; AC = 3 e CD = 1. A medida do volume do sólido gerado pela rotação do trapézio ABED, em torno do lado BC, é

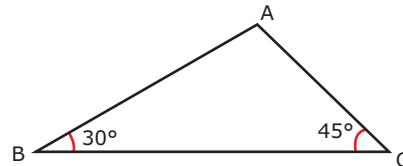
A) $\frac{26\pi}{3}$ B) $\frac{24\pi}{3}$ C) $\frac{22\pi}{3}$ D) $\frac{21\pi}{5}$

08. (UFC) Um cone circular reto e uma pirâmide de base quadrada têm a mesma altura e o mesmo volume. Se **r** é a medida do raio da base do cone, e **b** é a medida do lado da base da pirâmide, então o quociente $\frac{b}{r}$ é igual a

A) $\frac{1}{3}$ B) 1 C) $\sqrt{\pi}$ D) π E) 2π

09. (UFV-MG) Um chapéu, no formato de um cone circular reto, é feito de uma folha circular de raio 30 cm, recortando-se um setor circular de ângulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ radianos e juntando os lados. A área da base do chapéu, em cm², é

A) 140π
B) 110π
C) 130π
D) 100π
E) 120π

10. (UFRRJ) Considerando um lustre de formato cônico com altura e raio da base igual a 0,25 m, a distância do chão **H** em que se deve pendurá-lo para obter um lugar iluminado em forma de círculo com área de 25π m², é de

A) 12 m. B) 10 m. C) 8 m. D) 6 m. E) 5 m.

11. (UFRJ) Um recipiente em forma de cone circular reto de altura **h** é colocado com vértice para baixo e com eixo na vertical, como na figura. O recipiente, quando cheio até a borda, comporta 400 mL.

DETERMINE o volume de líquido quando o nível está em $\frac{h}{2}$.

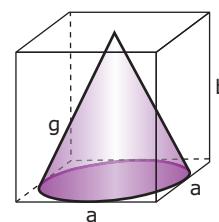
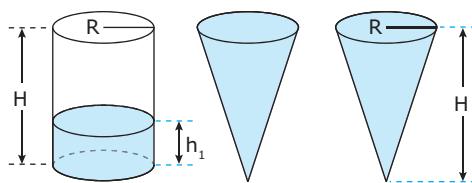
12. (UFG) O volume de um tronco de cone circular reto com base de raio **R**, cuja altura é a quarta parte da altura **h** do cone correspondente, é

A) $\frac{\pi R^2 h}{4}$
B) $\frac{\pi R^2 h}{12}$
C) $\frac{55\pi R^2 h}{192}$
D) $\frac{37\pi R^2 h}{192}$
E) $\frac{3\pi R^2 h}{4}$

13. (UFSC) A geratriz de um cone equilátero mede $2\sqrt{3}$ cm. **CALCULE** a área da seção meridiana do cone, em cm², e **MULTIPLIQUE** o resultado por $\sqrt{3}$.

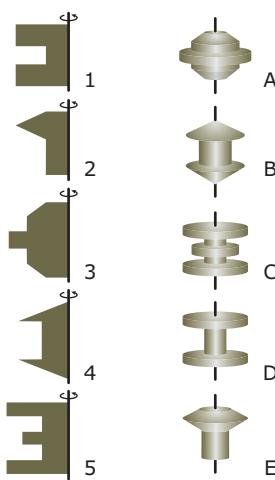
14. (PUC-Campinas-SP) Considere o triângulo ABC, representado na figura a seguir, no qual BC = $6 + 6\sqrt{3}$ cm.

Por uma rotação de 360° em torno do lado BC, obtém-se um sólido que servirá de modelo para a construção de um balão. O volume desse modelo, em centímetros cúbicos, será

A) $(\sqrt{3} + 3)72\pi$
B) $(\sqrt{3} + 1)72\pi$
C) $(\sqrt{3} + 3)36\pi$
D) $(\sqrt{3} + 1)36\pi$
E) $(\sqrt{3} + 3)24\pi$

15. (UFLA-MG–2006) Um reservatório de forma cônica para armazenamento de água tem capacidade para atender às necessidades de uma comunidade por 81 dias. Esse reservatório possui uma marca a uma altura **h** para indicar que a partir desse nível a quantidade de água é suficiente para abastecer a comunidade por mais 24 dias. O valor de **h** é

A) $h = \frac{2}{9}H$
B) $h = \frac{2}{3}H$
C) $h = \frac{8}{27}\sqrt{H}$
D) $h = \frac{1}{10}\sqrt[3]{H}$
E) $h = \frac{1}{2}H$

16. (FUVEST-SP–2006) Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão $\frac{b}{a}$ entre as dimensões do paralelepípedo é $\frac{3}{2}$ e o volume do cone é π. Então, o comprimento **g** da geratriz do cone é

A) $\sqrt{5}$
B) $\sqrt{6}$
C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{10}$
E) $\sqrt{11}$

17. (UFLA-MG–2007) Parte do líquido de um cilindro completamente cheio é transferido para dois cones idênticos, que ficam totalmente cheios.

A relação entre as alturas do líquido restante no cilindro h_1 e a altura **H** do cilindro é

A) $h_1 = \frac{H}{4}$

B) $h_1 = \frac{H}{2}$

C) $h_1 = \sqrt{\frac{H}{2}}$

D) $h_1 = \frac{H}{3}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–1999) Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras a seguir em torno da haste indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.

A correspondência correta entre as figuras planas e os sólidos de revolução obtidos é

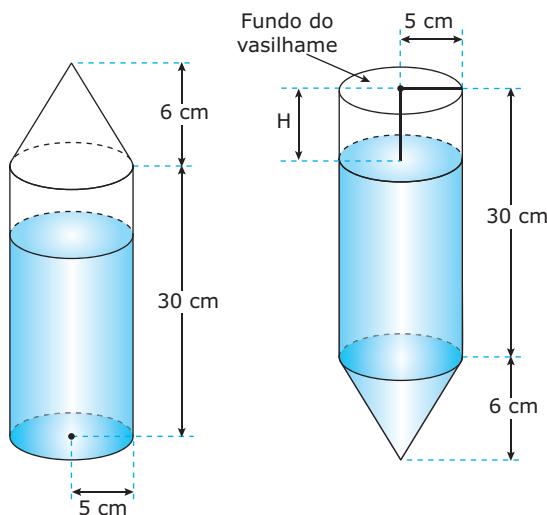
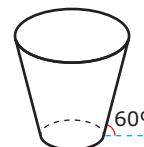
A) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.

B) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A.

C) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.

D) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C.

E) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

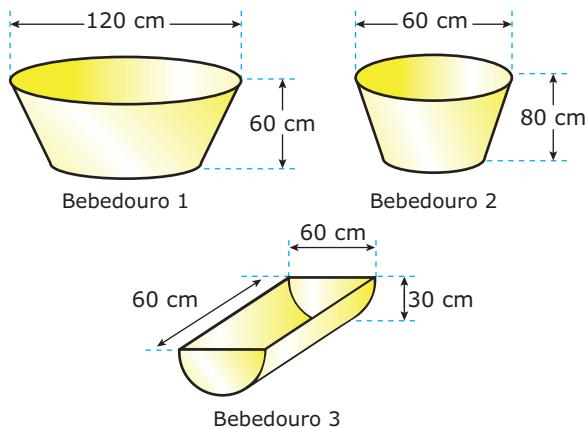
02. (Enem–2009) Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por 625π cm^3 de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 6 cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo **H** a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame. Volume do cone: $V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância **H**?

A) 5 cm

B) 7 cm

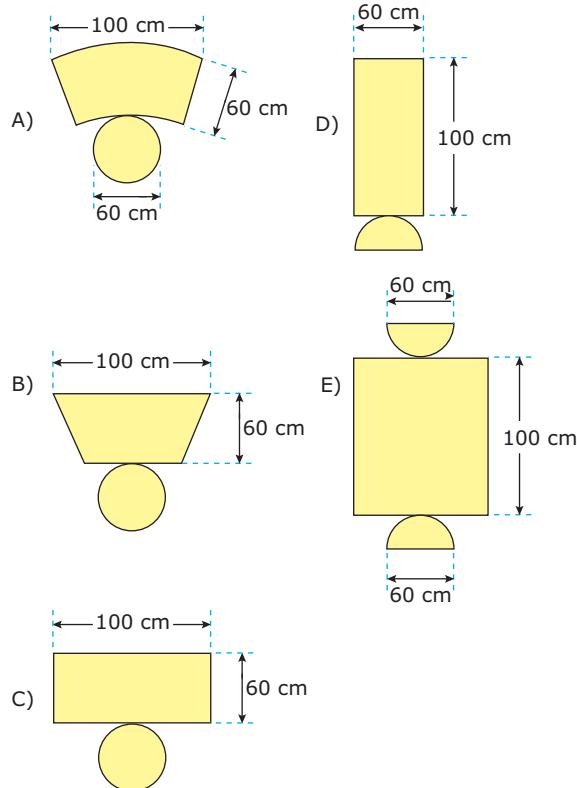
C) 8 cm

D) 12 cm

E) 18 cm

03. (Enem–2009) Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura a seguir:

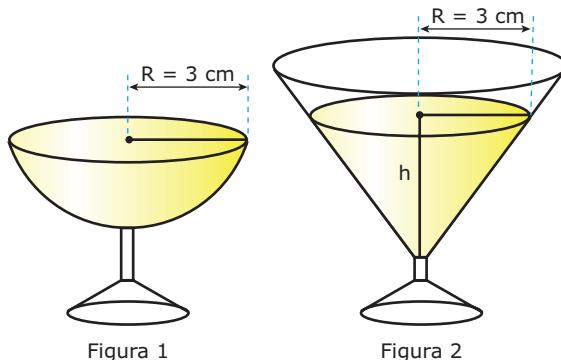
Considere que a base do reservatório tenha raio $r = 2\sqrt{3}$ m e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo. Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de

A) 12π m^2.

B) 108π m^2.

C) $(12 + 2\sqrt{3})^2 \pi$ m^2.

D) 300π m^2.

E) $(24 + 2\sqrt{3})^2 \pi$ m^2.

04. (Enem–2010) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

A escolha do bebedouro. *Biotemas*. vol. 22, nº 4, 2009 (Adaptação).

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

05. (Enem–2010) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

Considere:

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

A) 1,33
B) 6,00
C) 12,00
D) 56,52
E) 113,04

GABARITO

Fixação

01. 27 02. C 03. D 04. A 05. C

Propostos

01. B
02. 26
03. D
04. C
05. A
06. E
07. A
08. C
09. D
10. E
11. V = 50 mL
12. D
13. 9
14. B
15. B
16. D
17. D

Seção Enem

01. D 02. B 03. B 04. E 05. B

MATEMÁTICA

MÓDULO 09 FRENTE C

Função exponencial

INTRODUÇÃO

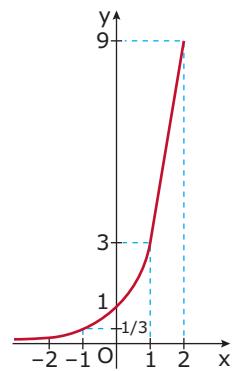
Conta uma lenda que um rei havia prometido realizar qualquer desejo a quem executasse uma difícil tarefa. Quando um dos seus súditos conseguiu realizá-la, o rei viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. O súdito pediu então que as 64 casas de um tabuleiro de xadrez, jogo muito apreciado no reino, fossem preenchidas com grãos de trigo, do seguinte modo: na primeira casa, seria colocado um grão de trigo e, em cada casa seguinte, seria colocado o dobro de grãos que havia na casa anterior. O rei suspirou aliviado, considerando o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os seus conselheiros, alguns dias depois, anunciaram que o reino encontrava-se totalmente sem provisões de trigo, uma vez que apenas na última casa o total de grãos era de 2^{63}, o que corresponde a, aproximadamente, 9 223 300 000 000 000 000 = $9{,}2233 \times 10^{18}$. Essa quantidade, juntamente com a soma das quantidades colocadas nas outras casas, superava em muito não só a capacidade do reino, mas a de todos os outros de que se tinha notícia.

Essa lenda nos dá um exemplo de uma função exponencial, a função $y = 2^x$. As funções exponenciais crescem ou decrescem muito rapidamente, sendo extremamente importantes para descrever diversos fenômenos, tais como crescimento populacional, reprodução de bactérias, decaimento radioativo, juros compostos, entre outros. Seu estudo desenvolveu-se notadamente por volta do século XVI, com o trabalho de dois matemáticos: John Napier (1550-1617) e Henry Briggs (1561-1630).

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Tal função é denominada **função exponencial**.

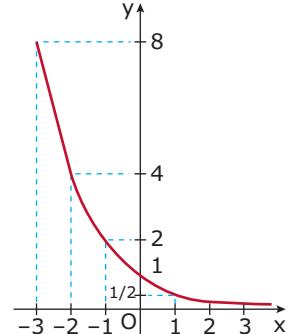
Exemplos

1°) $f(x) = 3^x$

2°) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

3°) $f(x) = 0{,}78^x$

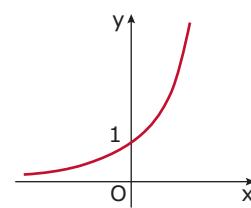
4°) $f(x) = 2{,}23^x$

GRÁFICOS

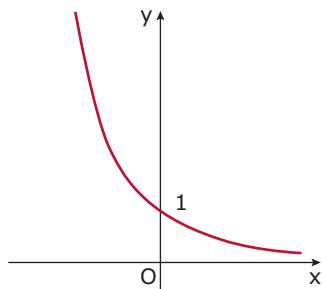
Considere a função $y = 3^x$. Vamos atribuir alguns valores à variável, calcular a imagem correspondente e construir o gráfico. Assim, temos:

x	$y = 3^x$
−2	$\frac{1}{9}$
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

Do mesmo modo, vamos obter o gráfico da função:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

De modo geral, há dois tipos de gráfico para a função $f(x) = a^x$.

i) Se $a > 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **crescente**.

Exemplo

$f(x) = 2^x$

ii) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **decrescente**.

Exemplo

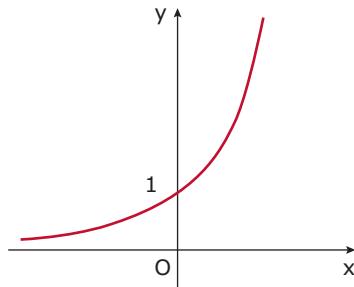
$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

Com relação aos gráficos, podemos dizer:

i) Trata-se de uma função injetora, pois a cada valor da imagem corresponde um único valor do domínio.

ii) O domínio de uma função exponencial é sempre igual ao conjunto dos números reais ($D = \mathbb{R}$).

iii) A curva está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x$ é sempre maior que zero para todo **x** real. Portanto, a sua imagem Im é dada por $Im = \mathbb{R}_+^*$.

iv) A curva corta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1). Isso ocorre porque, para $x = 0$, temos $y = a^0 = 1$.

OBSERVAÇÃO

O número e

Trata-se de um número irracional, cujo valor é 2,71828... . Esse número é conhecido como número neperiano, uma referência ao matemático escocês John Napier, autor da primeira publicação sobre a Teoria dos Logaritmos.

O número **e** é extremamente importante no estudo de juros e de diversos fenômenos naturais, tais como crescimento populacional, decaimento radioativo, crescimento de bactérias, entre outros.

O gráfico da função $y = e^x$ é dado por:

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Determinar os valores de **k** para os quais a função $f(x) = \left(2 + \frac{3k}{5}\right)^x$ é crescente.

Resolução:

Para que a função seja crescente, é necessário que $2 + \frac{3k}{5} > 1$.

Portanto, temos:

$$2 + \frac{3k}{5} > 1 \Rightarrow \frac{3k}{5} > -1 \Rightarrow 3k > -5 \Rightarrow k > -\frac{5}{3}$$

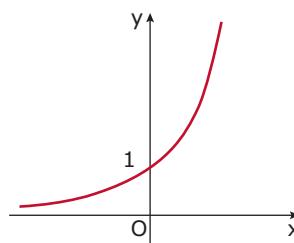
02. (PUC-SP) Sobre a função $f(x) = e^x$ definida em $\mathbb{R}$, podemos afirmar que

A) tem um único zero no intervalo [0, 2].

B) $e^x < a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}^*$.

C) $e^x > a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$.

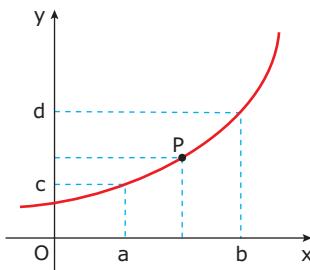
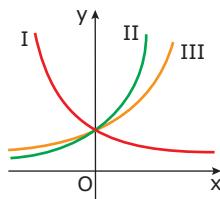
D) assume valores de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$.

E) assume valores apenas em $\mathbb{R}_+$.

Resolução:

A função $f(x) = e^x$ não possui raízes, pois $e^x > 0$ para todo **x** real. Portanto, a alternativa **A** é falsa.

Para $0 < a < 1$, temos que $e^x > a^x$. Portanto, a alternativa **B** é falsa.

Para $a > e$, temos que $e^x < a^x$. Portanto, a alternativa **C** é falsa.

A função $f(x) = e^x$ possui o seguinte gráfico:

Observe que se trata de uma função com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, a alternativa **D** é verdadeira. Conforme visto no item anterior, o domínio não se restringe ao conjunto $\mathbb{R}_+$. Portanto, a alternativa **E** é falsa.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFLA-MG–2007) A figura é um esboço do gráfico da função $y = 2^x$. A ordenada do ponto **P** de abscissa $\frac{a+b}{2}$ é

A) $\sqrt{cd}$ B) $\sqrt{c + d}$ C) cd D) $(cd)^2$

02. (Mackenzie-SP) Na figura, os gráficos I, II e III referem-se, respectivamente, às funções $y = a^x$, $y = b^x$ e $y = c^x$.

Então, está **CORRETO** afirmar que

A) $0 < a < b < c$
B) $0 < b < c < a$
C) $a < 0 < b < c$
D) $0 < a < c < b$
E) $a < 0 < c < b$

03. (UNESP) A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático: $h(t) = 4t - t.2^{0,2.t}$, com **t** em segundos, h(t) em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante esse salto foi

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 10

04. (UNIFESP–2009) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se **K** é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ para estimar a sua eliminação depois de um tempo **t**, em horas. Neste caso, o tempo **MÍNIMO** necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de

A) 12 horas e meia.
B) 12 horas.
C) 10 horas e meia.
D) 8 horas.
E) 6 horas.

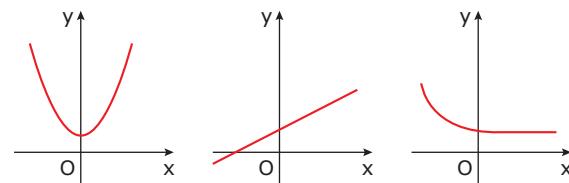
05. (UEL-PR) O crescimento de uma colônia de bactérias é descrito por $P(t) = \alpha.4^{\lambda.t}$, em que $t \geq 0$ é o tempo, dado em horas, e P(t) é a população de bactérias no instante **t**. Se, após 4 horas, a população inicial da colônia triplicou, após 8 horas o número de bactérias da colônia será

A) 6α C) 9α E) $\alpha + 8$
B) 8α D) $8\alpha - 4$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se **a** e **b** são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que

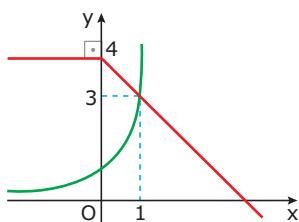
A) $a + b = 2$
B) $a + b = 1$
C) $a - b = 3$
D) $a - b = 2$
E) $a - b = 1$

02. (UNIRIO-RJ) Numa população de bactérias, há $P(t) = 10^a.4^{3t}$ bactérias no instante **t** medido em horas (ou fração da hora). Sabendo-se que inicialmente existem 10^a bactérias, quantos minutos são necessários para que se tenha o dobro da população inicial?

A) 20 B) 12 C) 30 D) 15 E) 10

03. (PUC Minas) Os pontos A(1, 6) e B(2, 18) pertencem ao gráfico da função $y = n.a^x$. Então, o valor de a^n é

A) 6 B) 9 C) 12 D) 16

04. (PUC Minas) Cada um dos gráficos adiante representa uma destas funções:

$f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Sobre essas funções, foram feitas três afirmativas:

I. $f(0) = g(0) = h(0)$

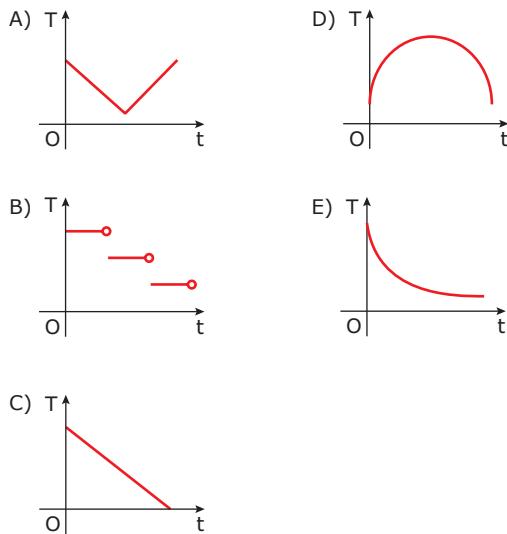
II. $g(x) > h(x)$, para $x > 0$

III. $f(x) > 0$ e $h(x) > 0$, para todo **x** pertencente aos reais.

O número de afirmativas **CORRETAS** é

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

05. (Mackenzie-SP) Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções **f** e **g**, sendo $f(x) = a^x$. O valor de $g(g(-1)) + f(g(3))$ é

A) 1 B) 2 C) 3 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

06. (CEFET-MG–2008) O conjunto imagem da função real $f(x) = 2^{-3x^2 + 6x}$ é

A) $]-\infty, 3]$

B) $[0, 3]$

C) $\mathbb{R}_+^*$

D) $[0, +\infty[$

E) $]0, 8]$

07. (UFC) Suponha que um corpo, com temperatura positiva, seja inserido em um meio cuja temperatura é mais baixa do que a do corpo. A tendência natural será a diminuição da temperatura do corpo. Newton, estudando este fenômeno, descobriu que a temperatura **T** do corpo decresce à medida que o tempo **t** passa, segundo a equação mostrada adiante:

$$T(t) = A + B.e^{-kt}$$

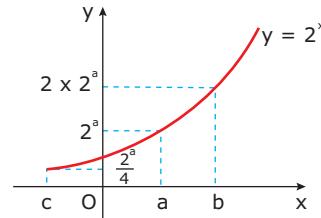
Em que **e** é a base do logaritmo natural e **A**, **B** e **k** são constantes positivas. Assinale a alternativa na qual consta o gráfico cartesiano que **MELHOR** representa, nesse fenômeno, a temperatura **T** em função do tempo **t**.

A)

D)

B)

E)

C)

08. (UFF-RJ) A automedicação é considerada um risco, pois a utilização desnecessária ou equivocada de um medicamento pode comprometer a saúde do usuário. Substâncias ingeridas difundem-se pelos líquidos e tecidos do corpo, exercendo efeito benéfico ou maléfico. Depois de se administrar determinado medicamento a um grupo de indivíduos, verificou-se que a concentração **y** de certa substância em seus organismos alterava-se em função do tempo decorrido **t**, de acordo com a expressão:

$$y = y_0.2^{-0,5t}$$

Em que y_0 é a concentração inicial e **t** é o tempo em hora. Nessas circunstâncias, pode-se afirmar que a concentração da substância tornou-se a quarta parte da concentração inicial após

A) $\frac{1}{4}$ de hora.

B) $\frac{1}{2}$ hora.

C) 1 hora.

D) 2 horas.

E) 4 horas.

09. (UFRN) No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função $y = 2^x$, os números **a**, **b**, **c** e suas imagens.

Observando-se a figura, pode-se concluir que, em função de **a**, os valores de **b** e **c** são, respectivamente,

A) $\frac{a}{2}$ e 4a

B) a – 1 e a + 2

C) 2a e $\frac{a}{4}$

D) a + 1 e a – 2

10. (UFPE–2007) O preço de um automóvel, P(t), desvaloriza-se em função do tempo **t**, dado em anos, de acordo com uma função de tipo exponencial $P(t) = b.a^t$, com **a** e **b** sendo constantes reais. Se, hoje (quando t = 0), o preço do automóvel é de R$ 20 000,00, e valerá R$ 16 000,00 daqui a 3 anos (quando t = 3), em quantos anos o preço do automóvel será de R$ 8 192,00?

Dado: $\frac{8\ 192}{20\ 000} = 0,8^4$

11. (UERJ) Em um município, após uma pesquisa de opinião, constatou-se que o número de eleitores dos candidatos **A** e **B** variava em função do tempo **t**, em anos, de acordo com as seguintes funções:

$$A(t) = 2.10^5(1,6)^t$$

$$B(t) = 4.10^5(0,4)^t$$

Considere as estimativas corretas e que t = 0 refere-se ao dia 1 de janeiro de 2000. **DETERMINE** em quantos meses os candidatos terão o mesmo número de eleitores.

12. (PUC RS) Uma substância que se desintegra ao longo do tempo tem sua quantidade existente, após **t** anos, dada por $M(t) = M_0.(1,4)^{\frac{-t}{1\,000}}$, em que M_0 representa a quantidade inicial. A porcentagem da quantidade existente após 1 000 anos em relação à quantidade inicial M_0 é, aproximadamente,

A) 14%. B) 28%. C) 40%. D) 56%. E) 71%.

13. (Mackenzie-SP) A função real definida por $f(x) = a.x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, é tal que $f(f(x)) = 8x^4$. Então, o número real **a** vale

A) $\frac{1}{4}$ B) 2 C) 4 D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

14. (Unip-SP) O número de raízes reais da equação

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = -x^2 + 4$ é

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15. (ITA-SP) Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por:

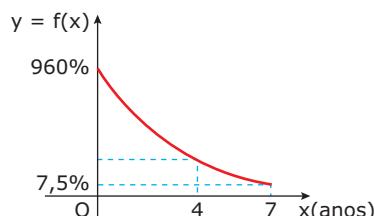
$$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ e } g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Considere as afirmações:

I. Os gráficos de **f** e **g** não se interceptam.

II. As funções **f** e **g** são crescentes.

III. $f(-2)g(-1) = f(-1)g(-2)$.

Então,

A) apenas a afirmação I é falsa.
B) apenas a afirmação III é falsa.
C) apenas as afirmações I e II são falsas.
D) apenas as afirmações II e III são falsas.
E) todas as afirmações são falsas.

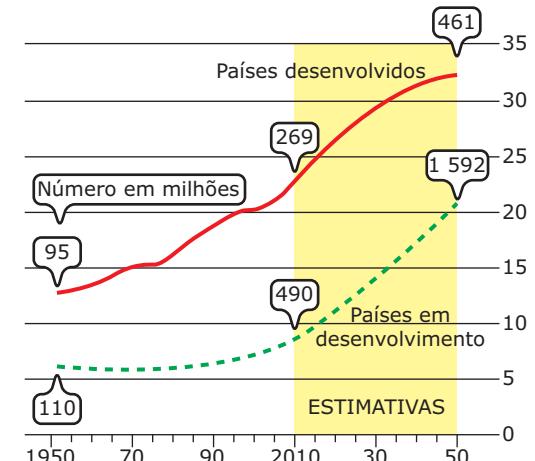
16. (FGV-SP–2010) O valor de um carro decresce exponencialmente, de modo que seu valor, daqui a **x** anos, será dado por $V = A.e^{-k.x}$, em que $e = 2,7182...$. Hoje, o carro vale R$ 40 000,00 e daqui a 2 anos valerá R$ 30 000,00. Nessas condições, o valor do carro daqui a 4 anos será

A) R$ 17 500,00.
B) R$ 20 000,00.
C) R$ 22 500,00.
D) R$ 25 000,00.
E) R$ 27 500,00.

17. (Unicamp-SP) Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função $F(t) = a.2^{-b.t}$, em que a variável **t** é dada em anos e **a** e **b** são constantes.

A) **ENCONTRE** as constantes **a** e **b** de modo que a população inicial (t = 0) seja igual a 1 024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.

B) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a $\frac{1}{8}$ da população inicial?

C) **ESBOCE** o gráfico da função F(t) para $t \in [0, 40]$.

18. (UERJ) A inflação anual de um país decresceu no período de sete anos. Esse fenômeno pode ser representado por uma função exponencial do tipo $f(x) = a.b^x$, conforme o gráfico a seguir:

DETERMINE a taxa de inflação desse país no quarto ano de declínio.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.

Disponível em: <www.economist.com>. Acesso em: 9 jul. 2009 (Adaptação).

Suponha que o modelo exponencial $y = 363.e^{0,03.x}$, em que x = 0 corresponde ao ano 2000, x = 1 corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que **y** é a população em milhões de habitantes no ano **x**, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

A) 490 e 510 milhões.
B) 550 e 620 milhões.
C) 780 e 800 milhões.
D) 810 e 860 milhões.
E) 870 e 910 milhões.

02. A pressão atmosférica **P**, em mmHg, é dada em função da altura **h** (em relação ao nível do mar) pela expressão $P(h) = 760.e^{\lambda.h}$, sendo **e** o número neperiano, que vale aproximadamente 2,7182. Um alpinista, ao escalar uma elevação, verificou através de um barômetro (instrumento que mede a pressão atmosférica) que a pressão no ponto em que se encontrava era igual a 600 mmHg. Considerando o parâmetro $\lambda = -0,0002$, pode-se afirmar que a altura do alpinista, em relação ao nível do mar, é igual a

Dados: $e^{6,63} = 760$ e $e^{6,40} = 600$

A) 1 150 m.

B) 1 370 m.

C) 1 520 m.

D) 2 240 m.

E) 3 000 m.

03. Sob certas condições, o número **N** de bactérias de uma cultura, em função do tempo **t**, medido em horas, é dado por $N(t) = N_0.2^{\frac{t}{12}}$. Isso significa que, após 6 dias, o número inicial de bactérias terá sido multiplicado por

A) $\sqrt{2}$

B) 2

C) 16

D) 1 024

E) 4 096

04. A madeira foi um dos primeiros materiais usados pelo homem, na construção de sua habitação e de seus primeiros meios de transporte. Com a alta utilização desse material, intensificaram-se o desmatamento e a significativa diminuição das florestas no mundo. A fim de solucionar esse problema, tende-se à produção de madeira a partir de florestas plantadas ou regeneradas. Para calcular o rendimento **V** de uma dessas florestas, podemos usar a fórmula:

$$V = 6,7e^{\frac{-48,1}{t}}$$

Em que **V** nos dá o valor em metros cúbicos de madeira por are, em função da idade da floresta, **t**. Considerando $e^{-0,481} = 0,62$, a quantidade de m^3 de madeira que renderá uma floresta de 80 hectares com 100 anos de idade está entre

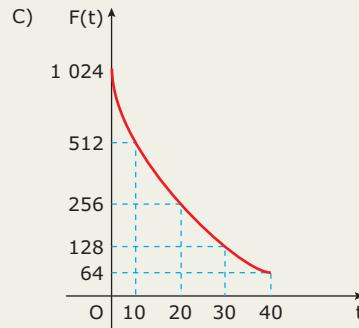
A) 10 000 e 20 000

B) 20 000 e 30 000

C) 30 000 e 40 000

D) 40 000 e 50 000

E) 50 000 e 60 000

GABARITO

Fixação

01. A 02. D 03. E 04. B 05. C

Propostos

01. E

02. E

03. B

04. D

05. C

06. E

07. E

08. E

09. D

10. 12 anos

11. 6 meses

12. E

13. B

14. C

15. E

16. C

17. A) $a = 1\ 024$ e $b = \frac{1}{10}$

B) $t_{(mínimo)} = 30$ anos

C)

18. 60%

Seção Enem

01. E 02. A 03. E 04. C

MATEMÁTICA

MÓDULO 10 FRENTE C

Equações e inequações exponenciais

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Uma equação é dita exponencial quando a variável se apresenta no expoente. Seja **a** um número real tal que $0 < a \neq 1$. Como a função exponencial é injetora, temos:

Se $a^x = a^y$, então $x = y$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $32^x = 128$.

Resolução:

$32^x = 128 \Rightarrow (2^5)^x = 2^7 \Rightarrow 2^{5x} = 2^7 \Rightarrow$

$5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

Portanto, $S = \left\{\frac{7}{5}\right\}$.

02. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$.

Resolução:

Podemos escrever $3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{82}{9}$.

Substituindo 3^x por **y**, temos:

$y + \frac{1}{y} = \frac{82}{9} \Rightarrow \frac{9y^2 + 9}{9y} = \frac{82y}{9y}$

$9y^2 - 82y + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-82)^2 - 4.9.9 = 6\ 400$

$y = \frac{82 \pm 80}{18} \Rightarrow y = \frac{1}{9}$ ou $y = 9$

Para $y = \frac{1}{9}$, temos $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$.

Para $y = 9$, temos $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, $S = \{-2, 2\}$.

03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $4^x - 2^x - 12 = 0$.

Resolução:

$2^{2x} - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$

Substituindo 2^x por **y**, temos:

$y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4.1.(-12) = 49$

$y = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow y = -3$ ou $y = 4$

Para $y = -3$, temos $2^x = -3$ (absurdo).

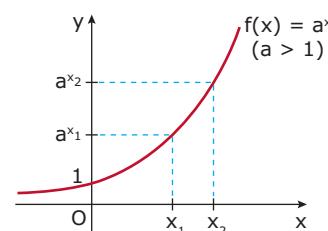
Para $y = 4$, temos $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, $S = \{2\}$.

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Toda desigualdade em que a variável aparece no expoente é uma inequação exponencial.

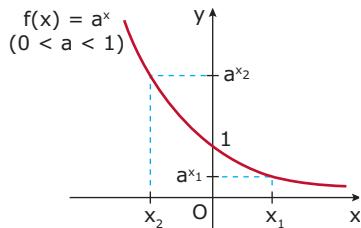
Exemplos

1º) $7^x > 343$

2º) $3^{x-4} \leq 81$

3º) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1}$

De modo geral, uma inequação deve ser resolvida colocando-se a mesma base **a** nos dois membros da inequação e considerando-se os seguintes casos:

1º caso: a > 1

Como a função $f(x) = a^x$ é crescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 > x_1$.

Portanto:

Se a > 1, devemos **conservar** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.

2º caso: $0 < a < 1$

Como a função $f(x) = a^x$ é decrescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 < x_1$.

Portanto:

Se $0 < a < 1$, devemos **inverter** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

04. Resolver a inequação $7^x > 343$.

Resolução:

$7^x > 343 \Rightarrow 7^x > 7^3$

Como $7 > 1$, devemos conservar a desigualdade, ou seja, $x > 3$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

05. Resolver a inequação $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x - 21} \geq 25^{-1}$.

Resolução:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq \frac{1}{25} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$

Como $0 < \frac{1}{5} < 1$, devemos inverter a desigualdade,

ou seja, $3x - 21 \leq 2 \Rightarrow 3x \leq 23 \Rightarrow x \leq \frac{23}{3}$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{23}{3}\right\}$.

06. Resolver a inequação $2^{x+2} - 2^{x-1} + 2^x \leq 18$.

Resolução:

Nesse caso, devemos utilizar as propriedades das potências.

$$2^x.2^2 - \frac{2^x}{2} + 2^x \leq 18 \Rightarrow 4.2^x - \frac{2^x}{2} + 2^x \leq 18$$

Substituindo 2^x por **y**, temos:

$$4y - \frac{y}{2} + y \leq 18 \Rightarrow \frac{10y - y}{2} \leq 18 \Rightarrow 9y \leq 36 \Rightarrow y \leq 4$$

Substituindo **y** por 2^x, obtemos:

$2^x \leq 4 \Rightarrow 2^x \leq 2^2 \Rightarrow x \leq 2$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (PUC Minas) Considere como verdadeiras as igualdades $A^{x-y} = 2$ e $A^{3y} = 8$. Nessas condições, o valor de A^x é

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10

02. (UFMG) Suponha que a equação

$$8^{ax^2 + bx + c} = 4^{3x + 5}.2^{5x^2 - x + 8}$$

seja válida para todo número real **x**, em que **a**, **b**, e **c** são números reais. Então, a soma $a + b + c$ é igual a

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{17}{3}$ C) $\frac{28}{3}$ D) 12

03. (UFSCar-SP) O par ordenado (x, y), solução do sistema

$$\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases},\ \text{é}$$

A) $\left(5, \frac{3}{2}\right)$

B) $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$

C) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$

D) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

E) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

04. (UNIRIO-RJ) O conjunto solução da inequação $x^{2x} \geq x^{x+3}$, em que $x > 0$ e $x \neq 1$, é

A) $]0, 1[\cup [3, +\infty[$

B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

C) $[3, +\infty[$

D) $\mathbb{R}$

E) $\varnothing$

05. (UFJF-MG) A função $c(t) = 200.3^{kt}$, com $k = \frac{1}{12}$, dá o crescimento do número **C**, de bactérias, no instante **t** em horas. O tempo necessário, em horas, para que haja, nessa cultura, 1 800 bactérias, está no intervalo

A) [0, 4]

B) [4, 12]

C) [12, 36]

D) [36, 72]

E) [72, 108]

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UEL-PR) Considere as soluções reais de $3^a.3^{7x}.3^{12} = 1$. Se $a = x^2$, então a diferença entre a maior e a menor dessas raízes é

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

02. (UNIRIO-RJ) Assinale o conjunto-solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \frac{1}{4}$.

A) $]-\infty, 5]$

B) $[4, +\infty[$

C) $[5, +\infty[$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$

03. (UFMG) O produto das raízes da equação $3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ é

A) -3
B) $-\frac{1}{4}$
C) $-\frac{1}{3}$
D) 1
E) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

04. (UFOP-MG) O valor de **x** que satisfaz a equação seguinte é um número

$$4^x - 15.2^x - 16 = 0$$

A) ímpar.
B) irracional.
C) negativo.
D) primo.
E) par.

05. (Fatec-SP) Seja f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$. O conjunto dos valores de **x** para os quais $f(x) < \frac{1}{8}$ é

A) $]3, 8[$
B) $\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[$
C) $]-\infty, 3[$
D) $\mathbb{R} - \{0, 8\}$
E) $\left]-\frac{1}{3}, 0\right[$

06. (UEL-PR) A relação a seguir descreve o crescimento de uma população de micro-organismos, sendo **P** o número de micro-organismos, **t** dias após o instante 0. O valor de **P** é superior a 63 000 se, e somente se, **t** satisfizer à condição

$$P = 64\,000.(1 - 2^{-0,1.t})$$

A) $2 < t < 16$
B) $t > 16$
C) $t < 30$
D) $t > 60$
E) $32 < t < 64$

07. (UFV-MG) Seja a função real $f(x) = a^x$, $a > 1$. O conjunto dos valores de **x** para os quais $f(x^2 - 3) > f(6)$ é

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
D) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3\}$

08. (FGV-SP) Seja a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5^{3x}$. Se $f(a) = 8$, então $f\left(-\frac{a}{3}\right)$ é

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{8}$
D) 4
E) 2

09. (Mackenzie-SP–2010) O valor de **x** na equação $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2x-2} = \frac{1}{27}$ é

A) tal que $2 < x < 3$.
B) negativo.
C) tal que $0 < x < 1$.
D) múltiplo de 2.
E) 3.

10. (UFPE) Quantas soluções reais possui a equação $10^{\frac{3x-1}{x^2+1}} - 10 = 0$?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 10

11. (FGV-SP) Uma instituição financeira oferece um tipo de aplicação tal que, após **t** meses, o montante relativo ao capital aplicado é dado por $M(t) = C.2^{0,04.t}$, em que $C > 0$. O menor tempo **POSSÍVEL** para quadruplicar uma certa quantia aplicada nesse tipo de aplicação é

A) 5 meses.
B) 2 anos e 6 meses.
C) 4 anos e 2 meses.
D) 6 anos e 4 meses.
E) 8 anos e 5 meses.

12. (PUC Minas) O valor de **x** que satisfaz a equação $3^{3x-1}.9^{2x+3} = 27^{3-x}$ é

A) 1
B) 3
C) $\frac{5}{2}$
D) $\frac{1}{3}$
E) $\frac{2}{5}$

13. (UFV-MG) Seja a equação $[12^{x-3}]^{x-2} = 1$. A soma e o produto de suas soluções são, respectivamente, os números

A) 3 e 2
B) 9 e 8
C) −5 e −24
D) −2 e −8
E) 5 e 6

14. (Cesgranrio) Se o quociente de 64^{x-1} por 4^{x-1} é 256^{2x}, então **x** é

A) $-\frac{2}{3}$
B) $-\frac{1}{3}$
C) 0
D) $\frac{1}{4}$
E) $\frac{3}{8}$

15. (FGV-SP) A raiz da equação $2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^x = 7$ é

A) um número primo.
B) um número negativo.
C) um número irracional.
D) um número maior ou igual a 1.
E) um múltiplo de 5.

16. (PUC RS) Se $3^x - 3^{2-x} = 2^3$, então $15 - x^2$ vale

A) 16
B) 15
C) 14
D) 11
E) 6

17. (UFV-MG–2008) Faça o que se pede.

A) **ESBOCE** o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^{-x}$.

B) **ENCONTRE** o conjunto solução da inequação $3^{x^2-x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-x^2}{x+1}}$ em $\mathbb{R}$.

MATEMÁTICA

18. (UFV-MG–2009) Para resolver a equação exponencial $4^{2x-2} - 24.4^{x-2} + 8 = 0$, Aline tomou o cuidado de inicialmente multiplicar ambos os membros da equação por 16. Tendo resolvido **CORRETAMENTE**, Aline encontrou dois números reais cujo produto vale

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

19. (UFLA-MG) O valor de **x** que satisfaz a equação $2^{x+3} + 2^{x-3} = 260$ é

A) 5 B) 8 C) 3 D) 2 E) 1

SEÇÃO ENEM

01. A fotografia a seguir mostra o famoso monumento conhecido como Gateway Arch.

Buphoff / Creative Commons

Localizado em St. Louis, Missouri, o Gateway Arch foi projetado pelo arquiteto Eero Saarinen. Embora lembre uma parábola, o monumento tem a forma exata de uma curva conhecida como catenária, nesse caso, no formato invertido. A catenária é uma curva formada por um fio pendente, e sua expressão é dada por $y = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$, em que **a** é uma constante que depende dos parâmetros físicos do fio, e **e** é o número neperiano. Se a = 1, o valor de **x** para o qual y = 1 é

A) –2

B) –1

C) 0

D) 1

E) 2

02. Uma garrafa de cerveja foi colocada em uma geladeira que tinha temperatura interna igual a 5 ºC. A temperatura da garrafa em função do tempo pode ser descrita pela função:

$$T(t) = T_a + B.3^{\frac{-t}{2}}$$

Em que T_a é a temperatura do ambiente, em graus Celsius, e **B** é uma constante. Sabe-se que, após 2 horas, a cerveja chegou a 14 ºC. Quanto tempo levou para que essa garrafa atingisse a temperatura de 6 ºC?

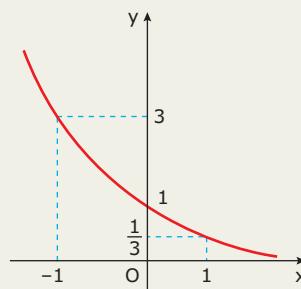
A) 2 horas

B) 3 horas

C) 4 horas

D) 5 horas

E) 6 horas

GABARITO

Fixação

01. A 02. C 03. D 04. A 05. C

Propostos

01. D
02. C
03. B
04. E
05. E
06. D
07. D
08. A
09. D
10. C
11. C
12. E
13. E
14. B
15. D
16. D
17. A)

B) $-1 < x \leq 1$

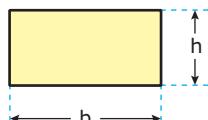
18. C
19. A

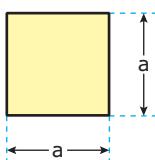
Seção Enem

01. C 02. E

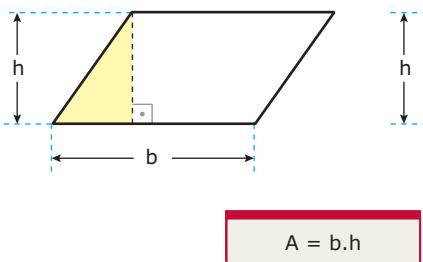
MATEMÁTICA

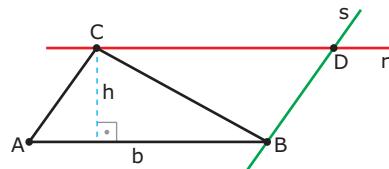
Áreas de polígonos

MÓDULO 09 FRENTE D

ÁREA DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS

Retângulo

A área **A** de um retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura.

$$A = b.h$$

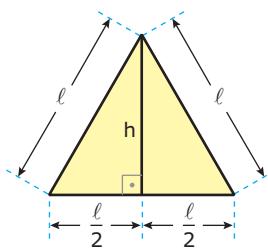
Quadrado

O quadrado é um retângulo de lados iguais. Logo, sua área **A** é o produto da medida da base pela medida da altura.

$$A = a^2$$

Paralelogramo

A área de um paralelogramo de base **b** e altura **h** é igual à área de um retângulo de base **b** e altura **h**. Observe:

$$A = b.h$$

Triângulo

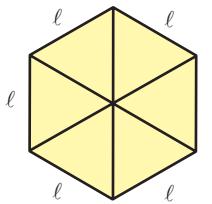
Consideremos um triângulo ABC, cuja base $\overline{AB}$ mede **b** e a altura relativa a essa base mede **h**. Traçando por **C** a reta **r** paralela à base, e por **B** a reta **s** paralela ao lado $\overline{AC}$, obtemos o paralelogramo ABDC a seguir:

Como o triângulo BCD é congruente ao triângulo ABC e a área **A** do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo, então, temos:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

Ou seja, a área do triângulo é metade do produto da medida da base pela medida da altura.

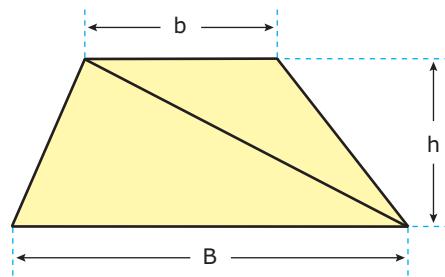
Triângulo equilátero

Pelo Teorema de Pitágoras, calcula-se facilmente a medida **h** da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ, obtendo:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área **A** desse triângulo é:

$$A = \frac{\ell.\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow$$

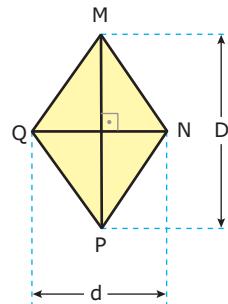
$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Hexágono regular

As diagonais de um hexágono regular dividem-no em seis triângulos equiláteros. Assim, a área **A** de um hexágono regular de lado ℓ é igual à seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado ℓ.

$$A = 6.\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3\sqrt{3}\ell^2}{2}}$$

Trapézio

Traçando uma diagonal de um trapézio de altura **h** e bases **b** e **B**, dividimo-lo em dois triângulos de altura **h** e bases de medidas **b** e **B**. Observe a figura.

A área **A** do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos. Assim, temos:

$$A = \frac{B.h}{2} + \frac{b.h}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{(B+b).h}{2}}$$

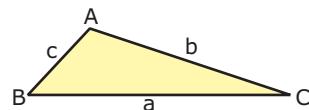
Portanto, a área **A** do trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases.

Losango

Consideremos um losango cujas diagonais medem **D** e **d**. Sabemos que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e o ponto em que elas concorrem é o ponto médio de cada uma.

Observe, portanto, que a área **A** do losango é o dobro da área do triângulo de base **d** e altura $\frac{D}{2}$.

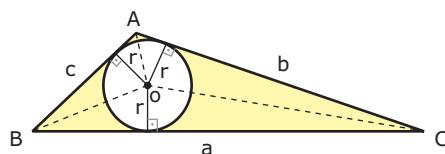
$$A = 2.\frac{d.\frac{D}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{d.D}{2}}$$

Portanto, a área **A** do losango é metade do produto das medidas das diagonais.

OBSERVAÇÃO

O losango também é paralelogramo. Logo, sua área pode ser calculada como a área de um paralelogramo.

EXPRESSÕES DA ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Em função das medidas dos lados – Teorema de Herão

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, sendo o semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$,

temos que a área do triângulo ABC é:

$$\boxed{A = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}$$

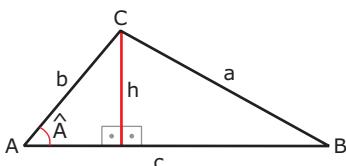
Em função do semiperímetro e do raio da circunferência inscrita

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, com semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, e a circunferência inscrita de raio **r**, então a área do triângulo ABC é:

$$\boxed{A = p.r}$$

Demonstração:

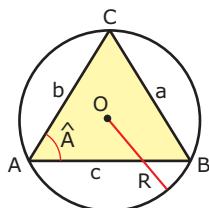
$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta BCO} + A_{\Delta ACO} + A_{\Delta ABO} \Rightarrow$

$A_{\Delta ABC} = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} \Rightarrow$

$A_{\Delta ABC} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right).r \Rightarrow$

$A_{\Delta ABC} = p.r$

Em função da medida de dois lados e do ângulo compreendido entre eles

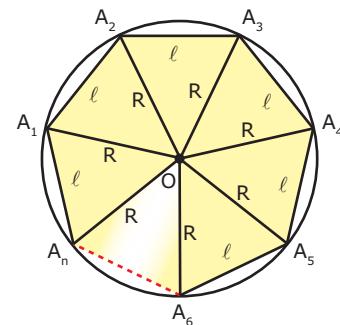
Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c** e ângulo de medida $\hat{A}$, compreendido pelos lados **b** e **c**, temos que a área desse triângulo é:

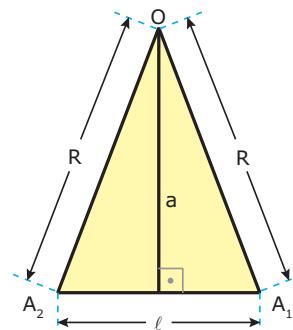
$$A = \frac{1}{2}.b.c.\text{sen}\ \hat{A}$$

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\Delta ABC} = \frac{c.h}{2} \\ \text{sen}\ \hat{A} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\ \text{sen}\ \hat{A} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{b.c.\text{sen}\ \hat{A}}{2}$$

Em função das medidas dos lados e do raio da circunferência circunscrita

Dado um triângulo ABC, com lados de medidas **a**, **b** e **c**, inscrito em uma circunferência de raio **R**.

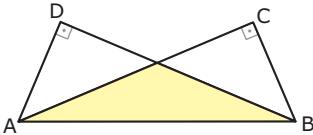
A área do triângulo ABC inscrito na circunferência é:

$$A = \frac{a.b.c}{4R}$$

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.b.c.\text{sen}\ \hat{A} \\ \frac{a}{\text{sen}\ \hat{A}} = 2R \Rightarrow \text{sen}\ \hat{A} = \frac{a}{2R} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{a.b.c}{4R}$$

ÁREAS DE POLÍGONOS REGULARES

Considere um polígono regular $A_1A_2A_3A_4...A_n$, de **n** lados de medida ℓ e semiperímetro $p = \frac{n\ell}{2}$, inscrito em uma circunferência de centro **O** e raio **R**. O polígono pode ser dividido em **n** triângulos isósceles congruentes.

Traça-se, em um dos triângulos, o apótema **a** do polígono.

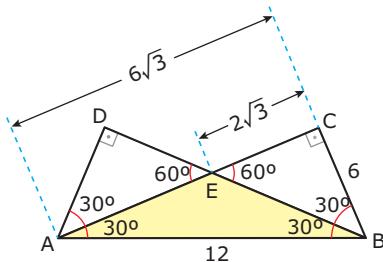
A área A_T desse triângulo é dada por $A_T = \frac{\ell.a}{2}$.

Como o polígono possui **n** triângulos, então sua área A_P é dada por:

$$A_P = n.A_T \Rightarrow A_P = n.\frac{\ell.a}{2} \Rightarrow A_P = \frac{n.\ell}{2}.a \Rightarrow$$

$$A_P = p.a$$

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (UNIFESP–2007) Dois triângulos congruentes ABC e ABD, de ângulos 30º, 60º e 90º, estão colocados como mostra a figura, com as hipotenusas AB coincidentes.

Se AB = 12 cm, a área comum aos dois triângulos, em centímetros quadrados, é igual a

A) 6 B) $4\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) 12 E) $12\sqrt{3}$

Resolução:

Dados AB = 12 cm e os ângulos internos dos triângulos ABC e ABD, determinamos as medidas dos outros lados.

$$\text{sen } 30° = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{12} \Rightarrow BC = 6\text{ cm}$$

$$\cos 30° = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{12} \Rightarrow AC = 6\sqrt{3}\text{ cm}$$

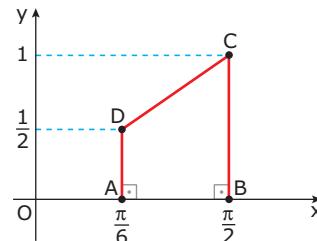
$$\text{tg } 30° = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{CE}{6} \Rightarrow CE = 2\sqrt{3}\text{ cm}$$

Portanto, a área, em cm², do triângulo ABE vale:

$$A_{\Delta ABE} = A_{\Delta ABC} - A_{\Delta BEC} \Rightarrow A_{\Delta ABE} = \frac{6.6\sqrt{3}}{2} - \frac{6.2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

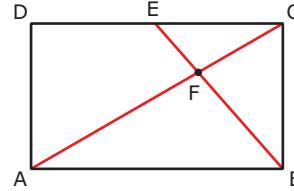
$$A_{\Delta ABE} = 12\sqrt{3}$$

02. (UFV-MG–2009) Seja **f** a função definida por f(x) = sen x, x ≥ 0. Num mesmo sistema de coordenadas, considere os pontos $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, **C** e **D**, em que **C** e **D** estão sobre o gráfico de **f**, cujas abscissas são, respectivamente, $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{6}$. Unindo-se esses pontos obtém-se o quadrilátero ABCD, cuja área vale

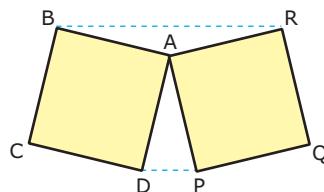
A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{3}$

Resolução:

Temos os pontos $A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ e $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Como os pontos **C** e **D** pertencem ao gráfico de f(x) = sen x, temos: $C\left(\frac{\pi}{2}, \text{sen } \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow C\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ e $D\left(\frac{\pi}{6}, \text{sen } \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow D\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

Substituindo os pontos **A**, **B**, **C** e **D** em um mesmo sistema de coordenadas, temos:

Logo, temos um trapézio retângulo cuja área vale:

$$A = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \Rightarrow A = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3}}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (FUVEST-SP–2007) A figura representa um retângulo ABCD, com AB = 5 e AD = 3. O ponto **E** está no segmento $\overline{CD}$, de maneira que CE = 1, e **F** é o ponto de interseção da diagonal $\overline{AC}$ com o segmento $\overline{BE}$.

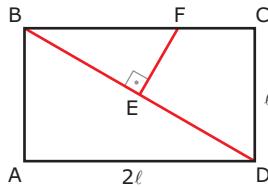
Então, a área do triângulo BCF vale

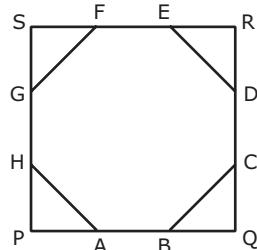
A) $\frac{6}{5}$

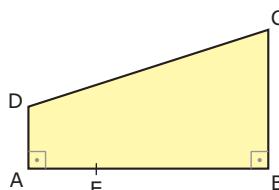
B) $\frac{5}{4}$

C) $\frac{4}{3}$

D) $\frac{7}{5}$

E) $\frac{3}{2}$

02. (UFRGS) Os quadrados ABCD e APQR, representados na figura a seguir, são tais que seus lados medem 6 e o ângulo $P\hat{A}D$ mede 30°.

Ligando-se o ponto **B** com o ponto **R** e o ponto **D** com o ponto **P**, obtém-se o hexágono BCDPQR, cuja área é

A) 90 B) 95 C) 100 D) 105 E) 110

03. (FUVEST-SP–2008) No retângulo ABCD da figura tem-se CD = ℓ e AD = 2ℓ. Além disso, o ponto **E** pertence à diagonal $\overline{BD}$, o ponto **F** pertence ao lado $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ é perpendicular a $\overline{BD}$. Sabendo que a área do retângulo ABCD é cinco vezes a área do triângulo BEF, então $\overline{BF}$ mede

A) $\ell\frac{\sqrt{2}}{8}$

B) $\ell\frac{\sqrt{2}}{4}$

C) $\ell\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $3\ell\frac{\sqrt{2}}{4}$

E) $\ell\sqrt{2}$

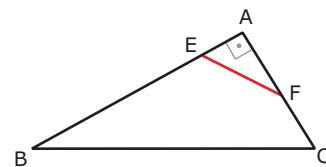
04. (UFMG–2008) O octógono regular de vértices ABCDEFGH, cujos lados medem 1 dm cada um, está inscrito no quadrado de vértices PQRS, conforme mostrado nesta figura.

Então, é **CORRETO** afirmar que a área do quadrado PQRS é

A) $1 + 2\sqrt{2}$ dm².

B) $1 + \sqrt{2}$ dm².

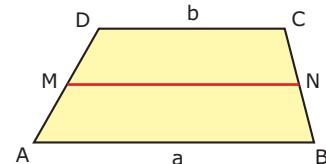
C) $3 + 2\sqrt{2}$ dm².

D) $3 + \sqrt{2}$ dm².

05. (PUC Minas) Pelos dados da figura a seguir, a medida da área do triângulo de vértices **C**, **D** e **E**, em m², é

Dados: BE = 2AE = 4 m; AD = AE; BC = BE

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG) Observe a figura.

$\overline{BC}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC, AE = $\frac{1}{4}$AB, FC = $\frac{1}{4}$AC e a área do quadrilátero BCFE é igual a 30 cm².

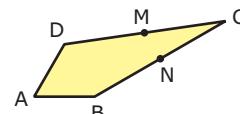
A área do triângulo AEF é igual a

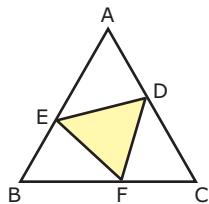
A) 10

B) 20

C) $\frac{60}{13}$

D) $\frac{80}{13}$

E) $\frac{90}{13}$

02. (UFG–2007) No trapézio ABCD a seguir, o segmento $\overline{AB}$ mede **a**, o segmento $\overline{DC}$ mede **b**, **M** é o ponto médio de $\overline{AD}$ e **N** é o ponto médio de $\overline{BC}$.

Nestas condições, a razão entre as áreas dos trapézios MNCD e ABNM é igual a

A) $\frac{a+2b}{3a+b}$

B) $\frac{a+3b}{2a+b}$

C) $\frac{a+3b}{3a+b}$

D) $\frac{a+2b}{2a+b}$

E) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$

03. (FUVEST-SP) No quadrilátero ABCD a seguir, $A\hat{B}C$ = 150°, AD = AB = 4 cm, BC = 10 cm, MN = 2 cm, sendo **M** e **N**, respectivamente, os pontos médios de $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$. A medida, em cm², da área do triângulo BCD é

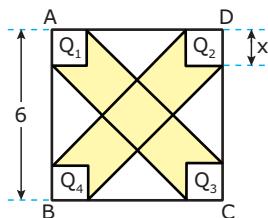
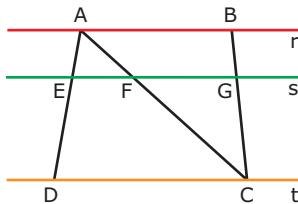
A) 10

B) 15

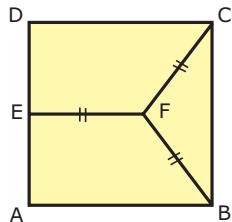
C) 20

D) 30

E) 40

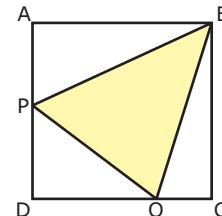
MATEMÁTICA

04. (UFES) No triângulo ABC da figura, temos AD = CF = BE = 2 cm e DC = FB = EA = $(1 + \sqrt{3})$ cm. **CALCULE** a medida, em graus, do ângulo AÊD e a área do triângulo DEF.

05. (UFRJ) Na figura a seguir, o quadrado ABCD tem lado 6. Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 são quadrados de lado **x**. A região hachurada tem área 16. **DETERMINE x**.

06. (UFMG) Observe a figura.

Nessa figura, as retas **r**, **s**, e **t** são paralelas; a distância entre **r** e **s** é 1; a distância entre **s** e **t** é 3; EF = 2 e FG = 5. **CALCULE** a área do quadrilátero ABCD.

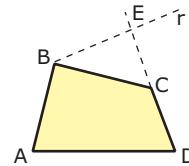
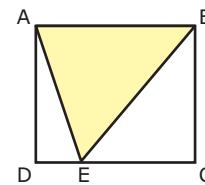
07. (UFMG) O comprimento de uma mesa retangular é o dobro de sua largura. Se a mesa tivesse 45 cm a menos de comprimento e 45 cm a mais de largura, seria quadrada. Assim, a área da mesa é de

A) 1,62 m².
C) 1,58 m².
B) 1,45 m².
D) 1,82 m².

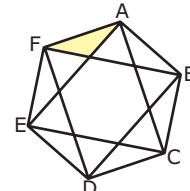
08. (UFMG) Observe a figura.

Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, EF = FC = FB e DE = $\frac{1}{2}$. A área do triângulo BCF é

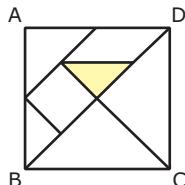
A) $\frac{3}{16}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

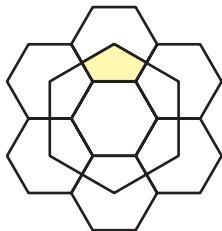
09. (UFMG) Nos triângulos ABC e DEF, AB = DE = c, AC = DF = b, $B\hat{A}C = \alpha$, $E\hat{D}F = 2\alpha$, e a área do triângulo ABC é o dobro da área do triângulo DEF. **CALCULE** o valor de cos α.

10. (UFMG) Observe esta figura.

Nessa figura, o quadrado ABCD tem área igual a 1; o triângulo BPQ é equilátero; e os pontos **P** e **Q** pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$. Assim, a área do triângulo BCQ é

A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

11. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, a reta **r** é paralela ao segmento $\overline{AC}$, sendo **E** o ponto de interseção de **r** com a reta determinada por **D** e **C**. Se as áreas dos triângulos ACE e ADC são 4 e 10, respectivamente, e a área do quadrilátero ABED é 21, então a área do triângulo BCE é

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

12. (UFU-MG–2007) Na figura a seguir, a área do triângulo ADE corresponde a 20% da área do quadrado ABCD. Para que a área do triângulo EBC seja igual a 30 cm², o lado do quadrado ABCD deve ser igual a

A) 10 cm. B) $10\sqrt{2}$ cm. C) $5\sqrt{3}$ cm. D) 5 cm.

13. (UFJF-MG–2008) A área do hexágono regular ABCDEF é 180 cm².

Qual é a área do triângulo sombreado, em centímetros quadrados?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

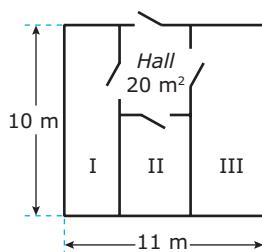
14. (Mackenzie-SP–2006) A figura a seguir representa as peças do tangram – quebra-cabeça chinês formado por 5 triângulos, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Sendo a área do quadrado ABCD igual a 4 cm^2, a área do triângulo sombreado, em cm^2, é

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{9}$

D) $\frac{1}{2}$

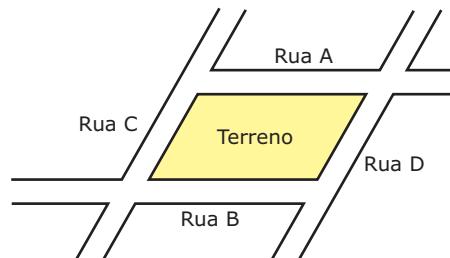
E) $\frac{1}{4}$

15. (FUVEST-SP–2009) A figura representa sete hexágonos regulares de lado 1 e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com os centros de seis dos hexágonos menores. Então, a área do pentágono hachurado é igual a

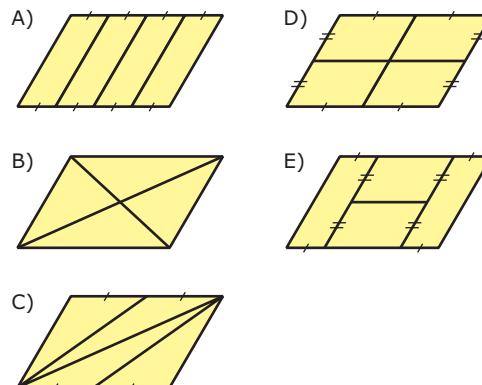
A) $3\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $\sqrt{3}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2000) Em uma empresa, existe um galpão que precisa ser dividido em três depósitos e um *hall* de entrada de 20 m^2, conforme a figura a seguir. Os depósitos I, II e III serão construídos para o armazenamento de, respectivamente, 90, 60 e 120 fardos de igual volume, e suas áreas devem ser proporcionais a essas capacidades.

A largura do depósito III dever ser, em metros, igual a

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

02. (Enem–2002) Um terreno com o formato mostrado na figura foi herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido em quatro lotes de mesma área.

As ruas **A** e **B** são paralelas.
As ruas **C** e **D** são paralelas.

Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que fossem analisadas pelos demais herdeiros. Dos esquemas a seguir, em que lados de mesma medida têm símbolos iguais, o único em que os quatro lotes não possuem, necessariamente, a mesma área é:

03. (Enem–2008) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

Figura 1

B

A

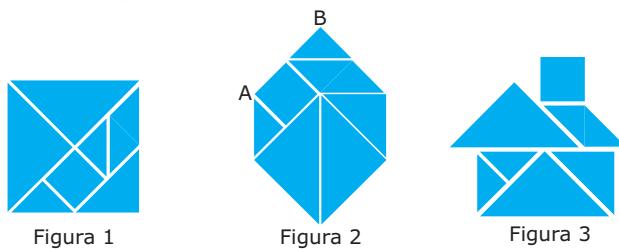
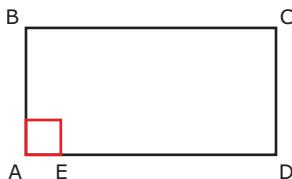



Figura 2

Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

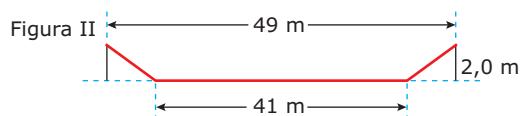
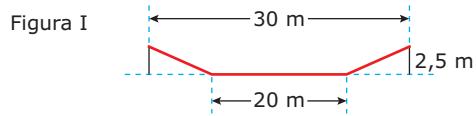
A) 4 cm^2.

B) 8 cm^2.

C) 12 cm^2.

D) 14 cm^2.

E) 16 cm^2.

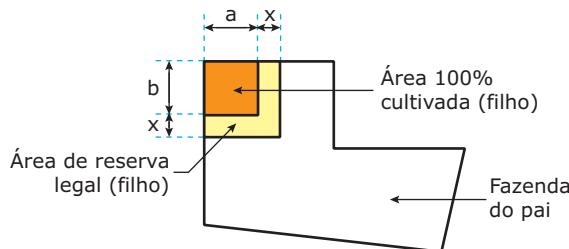
MATEMÁTICA

04. (Enem–2009) O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que AB = $\frac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice **A**, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual AE = $\frac{AB}{5}$ é lado do quadrado.

Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele

A) duplicasse a medida do lado do quadrado.
B) triplicasse a medida do lado do quadrado.
C) triplicasse a área do quadrado.
D) ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.
E) ampliasse a área do quadrado em 4%.

05. (Enem–2009) A vazão do Rio Tietê, em São Paulo, constitui preocupação constante nos períodos chuvosos. Em alguns trechos, são construídas canaletas para controlar o fluxo de água. Uma dessas canaletas, cujo corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, tem as medidas especificadas na figura I. Neste caso, a vazão da água é de 1 050 m^3/s. O cálculo da vazão, **Q** em m^3/s, envolve o produto da área **A** do setor transversal (por onde passa a água), em m^2, pela velocidade da água no local, **v**, em m/s, ou seja, Q = Av. Planeja-se uma reforma na canaleta, com as dimensões especificadas na figura II, para evitar a ocorrência de enchentes.

Figura I

Figura II

Disponível em: <http://www2.uel.br>.

Na suposição de que a velocidade da água não se alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma na canaleta?

A) 90 m^3/s
B) 750 m^3/s
C) 1 050 m^3/s
D) 1 512 m^3/s
E) 2 009 m^3/s

06. (Enem–2009) Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na figura como 100% cultivada. De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a figura.

De acordo com a figura anterior, o novo terreno do filho cumpre a lei, após acrescentar uma faixa de largura **x** metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal (filho). O dobro da largura **x** da faixa é

A) $10\%(a + b)^2$
B) $10\%(ab)^2$
C) $\sqrt{a + b} - (a + b)$
D) $\sqrt{(a + b)^2 + ab} - (a + b)$
E) $\sqrt{(a + b)^2 + ab} + (a + b)$

GABARITO

Fixação

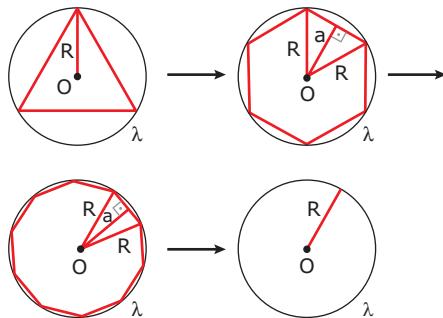
01. B 02. A 03. E 04. C 05. D

Propostos

01. E
02. C
03. C
04. $A\hat{E}D = 45°$
    Área = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm^2
05. x = 1 ou x = 2
06. $\frac{88}{3}$
07. A
08. A
09. $\frac{1}{4}$
10. C
11. B
12. A
13. A
14. E
15. E

Seção Enem

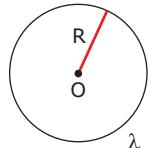
01. D
02. E
03. B
04. C
05. D
06. D

MATEMÁTICA

Áreas de círculo e suas partes

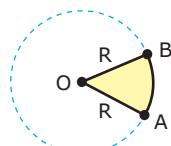
MÓDULO 10 FRENTE D

ÁREA DE UM CÍRCULO

Considere a circunferência λ de centro **O** e raio **R**.

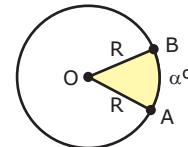
Inscreva em λ polígonos regulares, de modo que o número de lados cresça sucessivamente.

Sabemos que a área de um polígono regular **P** é o produto do seu semiperímetro **p** pelo apótema **a**: $A_P = p.a$

Quanto maior o número de lados do polígono regular inscrito em λ, mais seu perímetro se aproxima do perímetro (comprimento) da circunferência, e seu apótema se aproxima do raio. A área do polígono torna-se, portanto, cada vez mais próxima da área do círculo de raio **R**.

Afirma-se, então, que a área de um círculo é o produto do seu semiperímetro pelo raio.

Assim, para o círculo de raio **R**, tem-se:

$A = \pi R.R \Rightarrow$ $\boxed{A = \pi R^2}$

SETOR CIRCULAR

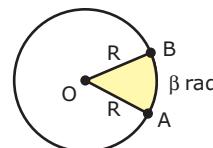
Setor circular é uma parte do círculo limitada por um arco de circunferência e dois raios com extremidades nas extremidades do arco.

Área de um setor circular

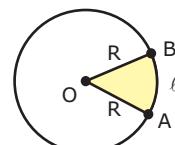
A área de um setor circular de raio **R** é proporcional à medida do arco correspondente.

1º caso:

$\overset{\frown}{AB}$ medido em graus.

Área		**Arco**
πR^2	------------------------	360º
A	------------------------	αº

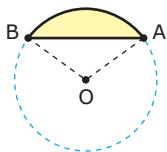
Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{360º}{\alphaº} \Rightarrow$ $\boxed{A = \dfrac{\pi R^2 \alphaº}{360º}}$

2º caso:

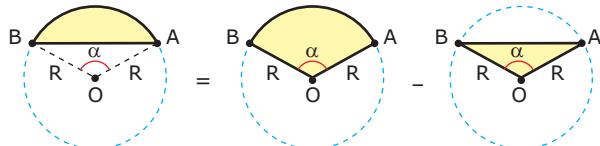
$\overset{\frown}{AB}$ medido em radianos.

Área		**Arco**
πR^2	------------------------	2π rad
A	------------------------	β rad

Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{2\pi}{\beta} \Rightarrow$ $\boxed{A = \dfrac{\beta R^2}{2}}$

3º caso:

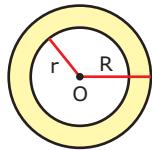
$\overset{\frown}{AB}$ medido em comprimento.

Área		**Arco**
πR^2	------------------------	$2\pi R$
A	------------------------	ℓ

Logo, $\dfrac{\pi R^2}{A} = \dfrac{2\pi R}{\ell} \Rightarrow$ $\boxed{A = \dfrac{\ell R}{2}}$

SEGMENTO CIRCULAR

Segmento circular é uma parte do círculo limitada por um arco de circunferência e por uma corda com extremidades nas extremidades do arco.

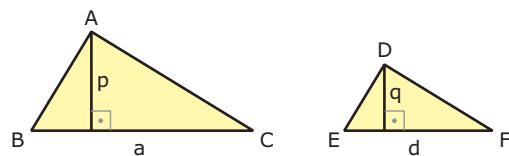
A corda $\overline{AB}$ determina dois segmentos circulares, como mostrado na figura anterior.

Área de um segmento circular

Para calcularmos a área de um segmento circular de ângulo central $0 < \alpha \leq \pi$, procedemos como mostrado na figura seguinte:

$$A = A_{setor} - A_{triângulo} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2}R^2.\text{sen } \alpha \Rightarrow$$

$$A = \frac{R^2}{2}(\alpha - \text{sen } \alpha)$$

COROA CIRCULAR

Dadas duas circunferências concêntricas de raios **r** e **R**, com r < R, chama-se coroa circular ao conjunto dos pontos pertencentes ao círculo de raio **R** e exteriores ao círculo de raio **r**.

Para calcularmos a área de uma coroa circular, fazemos a diferença entre as áreas dos dois círculos:

$$A = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow \quad A = \pi(R^2 - r^2)$$

RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES

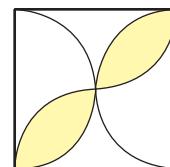
Consideremos os triângulos semelhantes ABC e DEF, sendo **K** a razão de semelhança do primeiro para o segundo.

$$\frac{a}{d} = \frac{p}{q} = k$$

Calculando a razão da área do primeiro para a área do segundo triângulo, temos:

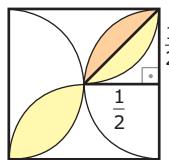
$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = \frac{\frac{ap}{2}}{\frac{dq}{2}} = \frac{ap}{dq} = \frac{a}{d}.\frac{p}{q} = k.k = k^2 \Rightarrow$$

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = k^2$$

Dessa maneira, deduzimos uma importante propriedade:

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Essa propriedade pode ser generalizada para quaisquer figuras semelhantes, isto é:

A razão entre áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre essas figuras.

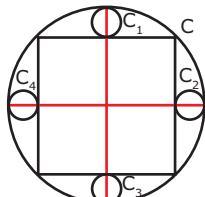
EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (AFA-SP) Na figura a seguir, o lado do quadrado é 1 cm. Então, a área da região hachurada, em cm², é

A) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

B) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$

C) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$

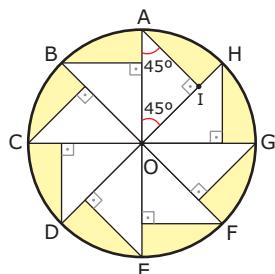
D) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$

Resolução:

A área hachurada corresponde à quatro vezes a área de um segmento circular de ângulo central 90° e raio $\frac{1}{2}$, como indicado na figura.

Assim, $A_{hac.} = 4(A_{setor} - A_{\Delta}) \Rightarrow A_{hac.} = 4.\left(\frac{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} - \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{2}\right) \Rightarrow$

$$A_{hac.} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\text{cm}^2$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG) Observe a figura.

Nela, a circunferência maior **C** tem raio 2, e cada uma das circunferências menores, C_1, C_2, C_3 e C_4, é tangente a **C** e a um lado do quadrado inscrito. Os centros de C_1, C_2, C_3 e C_4 estão em diâmetros de **C** perpendiculares a lados do quadrado. A soma das áreas limitadas por essas quatro circunferências menores é

A) $8\pi(3 - 2\sqrt{2})$
B) $2\pi(3 + 2\sqrt{2})$
C) $2\pi(3 - 2\sqrt{2})$
D) $8\pi(3 + 2\sqrt{2})$

02. (UNIFESP–2007) Se um arco de 60° num círculo I tem o mesmo comprimento de um arco de 40° num círculo II, então a razão da área do círculo I pela área do círculo II é

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{9}{4}$

03. (UFMG) Observe a figura.

Nela, a circunferência de centro **O** tem raio **r** e arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$, $\widehat{EF}$, $\widehat{FG}$, $\widehat{GH}$ e $\widehat{HA}$ congruentes. O valor da área sombreada, em função de **r**, é

A) $r^2(\pi - 2)$ B) $2r^2(\pi - 1)$ C) $2r^2$ D) $r^2(\pi - 1)$

04. (UFV-MG–2008) A região hachurada da figura 1 a seguir é denominada Triângulo de Reuleaux, em homenagem a Franz Reuleaux (1829-1905). Nesse triângulo, os vértices **A**, **B** e **C** são centros de circunferências de raio **r**, as quais contêm, respectivamente, os arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$, conforme ilustrado. A janela da Catedral de Notre Dame (figura 2) em Bruxelas, na Bélgica, tem seu *design* inspirado no Triângulo de Reuleaux.

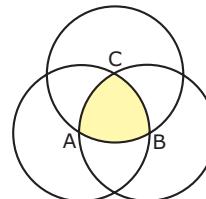



Figura 1

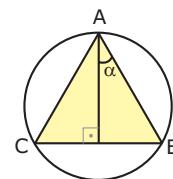
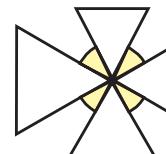
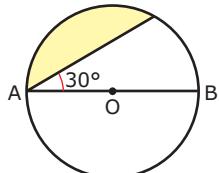



Figura 2

Para a construção dessa janela é necessário conhecer a área do Triângulo de Reuleaux, em função do raio **r**, que é dada por

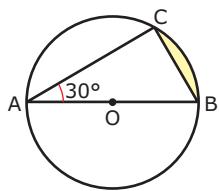
A) $\frac{\pi + \sqrt{3}}{2}r^2$
B) $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}r^2$
C) $\frac{\pi - \sqrt{5}}{2}r^2$
D) $\frac{\pi + \sqrt{5}}{2}r^2$

05. (FUVEST-SP–2006) Na figura a seguir, o triângulo ABC inscrito na circunferência tem AB = AC. O ângulo entre o lado $\overline{AB}$ e a altura do triângulo ABC em relação a $\overline{BC}$ é $\boldsymbol{\alpha}$. Nessas condições, o quociente entre a área do triângulo ABC e a área do círculo da figura é dado, em função de $\boldsymbol{\alpha}$, pela expressão

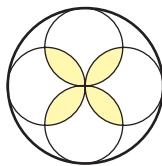
A) $\frac{2}{\pi}.\cos^2\alpha$
B) $\frac{2}{\pi}.\text{sen}^2\,2\alpha$
C) $\frac{2}{\pi}.\text{sen}^2\,2\alpha.\cos\alpha$
D) $\frac{2}{\pi}.\text{sen}\,\alpha.\cos 2\alpha$
E) $\frac{2}{\pi}.\text{sen}\,2\alpha.\cos^2\alpha$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (EFOA-MG–2006) Na figura a seguir, tem-se um círculo de 3 cm de raio e quatro triângulos equiláteros com vértices no centro desse círculo.

A área da região hachurada, em cm^2, é

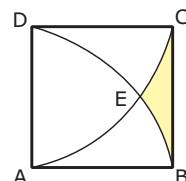
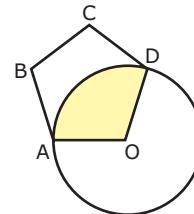
A) 4π B) 6π C) 2π D) 5π E) 3π

MATEMÁTICA

02. (Mackenzie-SP–2006) Na figura, o raio OA da circunferência mede 6 cm. Adotando-se $\pi = 3$, a área da região sombreada, em cm², é igual a

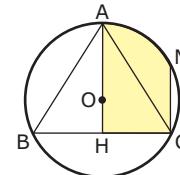
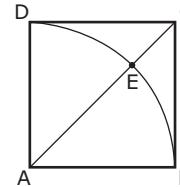
A) $9(4 - \sqrt{3})$
B) $9 - \sqrt{3}$
C) $4\sqrt{3}$
D) $9\sqrt{3}$
E) $4(9 - \sqrt{3})$

03. (UFOP-MG–2008) O triângulo ABC da figura a seguir está inscrito numa circunferência de raio $\sqrt{3}$ cm. O lado AB é diâmetro da circunferência e a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é 30º.

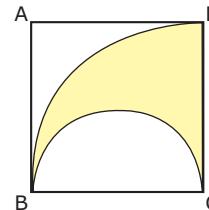
A área da região sombreada, em cm², é

A) $\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$
B) $\frac{3}{2}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$
C) $\frac{3}{2}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

04. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, os círculos internos são iguais e a região assinalada tem área $8(\pi - 2)$. Então, a área do círculo externo é

A) 20π
B) 16π
C) 8π
D) 4π
E) 2π

05. (UFBA) O triângulo ABC está inscrito num círculo de área igual a 16π cm², sendo $\hat{A} = 30°$, AB = 8 cm e AC.BC = x cm². **DETERMINE** o valor de $x\sqrt{3}$.

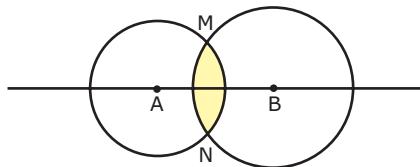
06. (FUVEST-SP) Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1. Logo, a área da região hachurada é

A) $1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
B) $1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
C) $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$
D) $1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
E) $1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

07. (UFTM-MG) A figura mostra uma circunferência de centro **O** e raio igual a 2 e um pentágono regular ABCDO, cujos vértices **A** e **D** pertencem à circunferência. A região hachurada tem área igual a

A) $\frac{6\pi}{5}$
B) $\frac{8\pi}{3}$
C) $\frac{9\pi}{4}$
D) $\frac{10\pi}{3}$
E) $\frac{12\pi}{5}$

08. (UFMG) Observe a figura.

Nessa figura, o triângulo ABC é equilátero e está inscrito em um círculo de centro **O** e raio r = 6 cm; $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ e **M** é ponto médio do arco $\overset{\frown}{AC}$. **DETERMINE** a área da região hachurada.

09. (PUC Minas) A figura a seguir apresenta um quadrado ABCD, cuja área mede 8 m². $\overset{\frown}{BD}$ é um arco de circunferência de centro em **A**. A medida da área da região BCE, em m², é

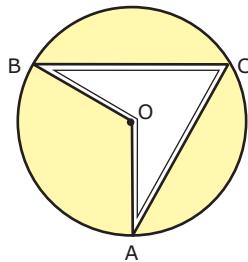
A) $8 - \pi$
B) $7 - \pi$
C) $6 - \pi$
D) $5 - \pi$
E) $4 - \pi$

10. (UEL-PR) Na figura, ABCD é um quadrado cujo lado mede **a**. Um dos arcos está contido na circunferência de centro **C** e raio **a**, e o outro é uma semicircunferência de centro no ponto médio de BC e de diâmetro **a**. A área da região hachurada é

A) $\frac{\pi a^2}{6}$
B) $\frac{\pi a^2}{8}$
C) $\frac{\pi a^2}{8} - \frac{1}{2}$
D) $\frac{\pi a^2}{6} - \frac{1}{3}$
E) $\frac{\pi a^2}{6} + 1$

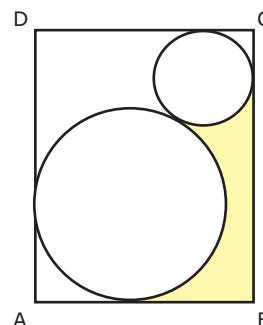
11. (UFPR–2007) Um cavalo está preso por uma corda do lado de fora de um galpão retangular fechado, de 6 metros de comprimento por 4 metros de largura. A corda tem 10 metros de comprimento e está fixada num dos vértices do galpão, conforme ilustra a figura a seguir. Determine a área total da região em que o animal pode se deslocar.

A) $(75\pi + 24)$ m²

B) 88π m²

C) 20π m²

D) $(100\pi - 24)$ m²

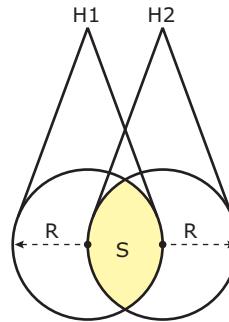
E) 176π m²

12. (UFMG) Os raios dos círculos de centros **A** e **B** medem 3 m e $3\sqrt{3}$ m, respectivamente, e a distância AB mede 6 m. **CALCULE** a área da região comum aos mesmos.

13. (UFSCar-SP) Para fins beneficentes, foi organizado um desfile de modas num salão em forma de círculo, com 20 metros de raio. A passarela foi montada de acordo com a figura a seguir, sendo que as passarelas $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são lados que corresponderiam a um triângulo equilátero inscrito na circunferência. No espaço sombreado, ocupado pela plateia, foram colocadas cadeiras, sendo uma cadeira por m² e um ingresso para cada cadeira.

Adotando $\sqrt{3} = 1,73$ e $\pi = 3,14$:

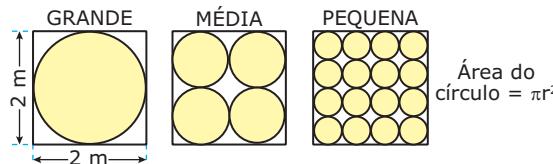
A) **DETERMINE** quantos metros cada modelo desfilou, seguindo uma única vez o roteiro $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$.

B) Sabendo-se que todas as cadeiras foram ocupadas, **CALCULE** quantos ingressos foram vendidos para este evento.

14. (UFMG–2006) Nesta figura, os dois círculos são tangentes entre si e tangentes aos lados do retângulo ABCD.

Sabe-se que o raio do círculo menor e o do círculo maior medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm e o lado $\overline{AB}$ do retângulo mede 9 cm.

1. **CALCULE** o comprimento do lado $\overline{AD}$ do retângulo.
2. **CALCULE** a área da região sombreada na figura.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Dois holofotes iguais, situados em H1 e H2, respectivamente, iluminam regiões circulares, ambas de raio **R**. Essas regiões se sobrepõem e determinam uma região **S** de maior intensidade luminosa, conforme figura.

Área do setor circular: $A_{SC} = A_{SC}\dfrac{\alpha R^2}{2}$, **α** em radianos

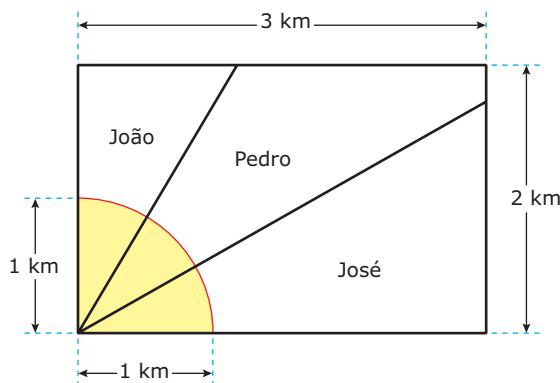
A área da região **S**, em unidades de área, é igual a

A) $\dfrac{2\pi R^2}{3} - \dfrac{\sqrt{3}R^2}{2}$

B) $\dfrac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$

C) $\dfrac{\pi R^2}{12} - \dfrac{R^2}{8}$

D) $\dfrac{\pi R^2}{2}$

E) $\dfrac{\pi R^2}{3}$

02. (Enem–2004) Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.

As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que

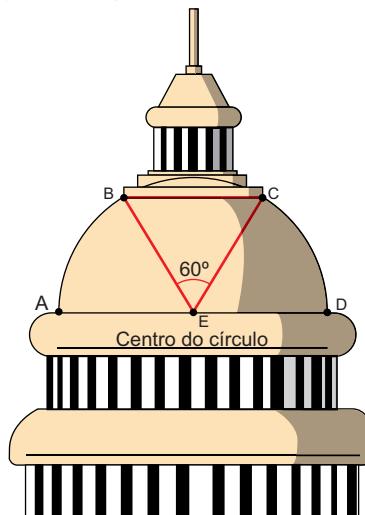
A) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.

B) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.

C) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.

D) as entidade I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.

E) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

03. (Enem–2009) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

$\left(\text{Considere: } \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58\right)$

A) 50%. B) 43%. C) 37%. D) 33%. E) 19%.

04. A parte superior do projeto de um monumento foi construída a partir de uma semicircunferência de raio 12 cm. Para a construção da casa de sino, foi retirada a região abaixo do arco BC e acima da reta que liga BC. A área, em cm², da região representada na figura delimitada pelo triângulo BCE e pelos setores circulares AEB e CED é

A) $24\pi + 18\sqrt{3}$

B) $24\pi + 27\sqrt{3}$

C) $24\pi + 36\sqrt{3}$

D) $48\pi + 27\sqrt{3}$

E) $48\pi + 36\sqrt{3}$

GABARITO

Fixação

01. C 02. B 03. A 04. B 05. E

Propostos

01. E
02. A
03. A
04. B
05. 48 cm²
06. C
07. A
08. $\frac{27\sqrt{3}}{2} + 6\pi$ cm²
09. E
10. B
11. B
12. $\frac{15\pi}{2} - 9\sqrt{3}$ m²
13. A) 109,2 m
 B) 910 ingressos vendidos.
14. 1. AD = $3(2 + \sqrt{3})$ cm
 2. $20 + \frac{21\sqrt{3}}{2} - 8\pi$ cm²

Seção Enem

01. A 02. E 03. E 04. E

MATEMÁTICA

MÓDULO 17 FRENTE E

Polinômios I

DEFINIÇÃO DE POLINÔMIO

Um polinômio é uma função na variável **x** da forma: $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

Em que:

i) $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ e a_0 são os coeficientes do polinômio.

ii) Os expoentes são números naturais.

Exemplos

1°) $P(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x + 2$

2°) $P(x) = -4x^5 + 8x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 1$

> Um polinômio é dito **nulo** se todos os seus coeficientes são iguais a zero.
> Portanto, $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ é nulo se, e somente se, $a_n = a_{n-1} = ... = a_1 = a_0 = 0$.

GRAU DO POLINÔMIO

Considere o polinômio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. Dizemos que o grau de P(x) é igual a **n**, se $a_n \neq 0$.

Exemplos

1°) O grau de $P(x) = 7x^4 - 3x^2 + 8$ é igual a 4.

2°) O grau de $P(x) = 2x^2 + 8$ é igual a 2.

3°) O grau de $P(x) = 13$ é igual a zero.

OBSERVAÇÃO

Não se define o grau de um polinômio nulo.

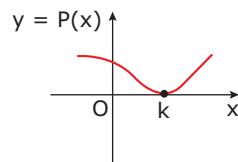
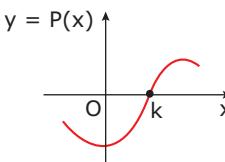
POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Os polinômios $P(x) = a_nx^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $Q(x) = b_nx^n + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ são idênticos se, e somente se, $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$ e $a_0 = b_0$, e escrevemos $P(x) \equiv Q(x)$.

Exemplo

Determinar os valores de **a**, **b** e **c** para os quais os polinômios $P(x) = ax^2 + 3x + 9$ e $B(x) = (b + 3)x^2 + (c - 1)x + 3b$ são idênticos.

Resolução:

Igualando os coeficientes dos termos correspondentes, obtemos:

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ 3 = c - 1 \\ 9 = 3b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos a = 6, b = 3 e c = 4.

RAIZ OU ZERO DE UM POLINÔMIO

Dizemos que um número **k** é raiz de um polinômio P(x) se, e somente se, P(k) = 0.

Do ponto de vista geométrico, a raiz representa o ponto no qual a curva, correspondente ao gráfico de P(x), intercepta o eixo das abscissas no plano cartesiano.

OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

Adição e subtração

Dados os polinômios:

$A(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e

$B(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$

i) A **adição** A(x) + B(x) é dada por:

$$A(x) + B(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

ii) A **subtração** A(x) − B(x) é dada por:

$$A(x) - B(x) = (a_n - b_n)x^n + ... + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_2 - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Portanto, nessas operações, basta adicionarmos ou subtrairmos os termos semelhantes.

Exemplo

Considerar os polinômios $A(x) = 5x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 9x + 12$ e $B(x) = x^4 + 23x^3 - 7x^2 + x + 3$. Assim, temos:

$A(x) + B(x) = 6x^4 + 20x^3 + 11x^2 - 8x + 15$

$A(x) - B(x) = 4x^4 - 26x^3 + 25x^2 - 10x + 9$

Multiplicação

O produto dos polinômios A(x) e B(x) é obtido através da multiplicação de cada termo de A(x) por todos os termos de B(x), reduzindo os termos semelhantes.

O grau do polinômio A(x).B(x) é igual à soma dos graus de A(x) e B(x).

Exemplo

Sejam os polinômios $A(x) = x^2 - 3x + 2$ e $B(x) = 2x - 1$. Assim, temos:

$A(x).B(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 1) \Rightarrow$

$A(x).B(x) = 2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 4x - 2 \Rightarrow$

$A(x).B(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

Divisão (método da chave)

Da divisão de dois polinômios A(x) e B(x) não nulos são obtidos os polinômios Q(x) (quociente) e R(x) (resto), tais que:

$$\begin{array}{r|l} A(x) & B(x) \\ \vdots & Q(x) \\ R(x) & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A(x) \equiv B(x).Q(x) + R(x) \\ gr(R) < gr(B) \text{ ou } R(x) = 0 \end{cases}$$

Em que:

A(x): Dividendo — gr(R): grau de R(x)

B(x): Divisor — gr(B): grau de B(x)

Q(x): Quociente

R(x): Resto

Para esclarecermos o método da chave, vamos efetuar a divisão do polinômio $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ pelo polinômio $B(x) = x^2 + 2x + 3$.

Inicialmente, devemos verificar se o grau do dividendo é maior ou igual ao grau do divisor. Caso contrário, não é possível efetuar a divisão. No problema, o grau do dividendo é igual a 3 e o grau do divisor é igual a 2. Portanto, podemos efetuar a divisão.

Escrevemos os polinômios no seguinte formato:

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \hline \end{array}$$

Inicialmente, dividimos o primeiro termo do dividendo pelo primeiro termo do divisor.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} & 4x \end{array}$$

Em seguida, multiplicamos 4x por todos os termos do divisor, da direita para a esquerda. O resultado de cada multiplicação é colocado, com o sinal trocado, abaixo de cada termo correspondente, no dividendo. Em seguida, somamos esses termos.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 8x^2 - 12x & 4x \\ \cline{1-1} -6x^2 - 13x + 1 & \end{array}$$

Repetindo o processo, dividimos $-6x^2$ por x^2.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 8x^2 - 12x & 4x - 6 \\ \cline{1-1} -6x^2 - 13x + 1 & \end{array}$$

Multiplicamos −6 por todos os termos do divisor, da direita para a esquerda. O resultado de cada multiplicação é colocado, com o sinal trocado, abaixo de cada termo correspondente, no dividendo. Em seguida, somamos esses termos.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 8x^2 - 12x & 4x - 6 \\ \cline{1-1} -6x^2 - 13x + 1 & \\ 6x^2 + 12x + 18 & \\ \cline{1-1} -x + 19 & \end{array}$$

Observe que não podemos continuar a divisão, pois o grau do termo obtido é menor do que 2.

Portanto, temos:

Quociente: $Q(x) = 4x - 6$ e

Resto: $R(x) = -x + 19$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (UFMG) O valor de **a** para que $1 + \sqrt{2}$ seja raiz do polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ é

A) −3 B) −1 C) 1 D) 3

Resolução:

Temos que:

$P(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2})^3 + a(1 + \sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + 1 = 0$

Desenvolvendo os termos, obtemos:

$1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} + a(1 + 2\sqrt{2} + 2) + 2 + \sqrt{2} = 0$

$9 + 6\sqrt{2} + 3a + 2\sqrt{2}a = 0 \Rightarrow 9 + 6\sqrt{2} = -3a - 2\sqrt{2}a$

Igualando os termos correspondentes, temos a = −3.

02. (UFES) O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + 7$, com coeficientes reais, é divisível por $x^2 + x + 1$. O valor da soma a + b é igual a

A) 7 B) 14 C) 15 D) 16 E) 21

Resolução:

Vamos efetuar a divisão pelo método da chave.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + ax^2 + bx + 7 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 - x & x + (a-1) \\ \cline{1-1} (a-1)x^2 + (b-1)x + 7 & \\ -(a-1)x^2 - (a-1)x + (1-a) & \\ \cline{1-1} (b-a)x + (8-a) & \end{array}$$

Como o polinômio é divisível, então devemos igualar o resto ao polinômio nulo, ou seja, a = b = 8.

Portanto, a + b = 16.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFOP-MG–2008) Sejam os polinômios $p(x) = (a + b)x^4 - 5$ e $q(x) = -2x^4 + (a + c)x^2 + b + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais. Suponha que p(x) e q(x) sejam iguais para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, a + b + c vale

A) –7 B) $-\frac{5}{2}$ C) –2 D) $-\frac{7}{2}$

02. (UFMG) Sejam $p(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = mx^2 + nx - 3$, polinômios com coeficientes reais. Sabe-se que $p(x) = (2x - 6).q(x) + x - 10$. Considerando-se essas informações, é **INCORRETO** afirmar que

A) se 10 é raiz de q(x), então 10 também é raiz de p(x).
B) p(3) = –7
C) d = 18
D) m = 2

03. (UFMG–2006) Neste plano cartesiano, está representado o gráfico do polinômio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sendo **a**, **b**, **c** e **d** números reais.

Considere estas afirmativas referentes a esse polinômio:

I. a – b + c – 5 = 0; e
II. p(p(6)) > p(6).

Então, é **CORRETO** afirmar que

A) nenhuma das afirmativas é verdadeira.
B) apenas a afirmativa I é verdadeira.
C) apenas a afirmativa II é verdadeira.
D) ambas as afirmativas são verdadeiras.

04. (UFMG–2007) Sejam $p(x) = ax^2 + (a - 15)x + 1$ e $q(x) = 2x^2 - 3x + \frac{1}{b}$ polinômios com coeficientes reais. Sabe-se que esses polinômios possuem as mesmas raízes. Então, é **CORRETO** afirmar que o valor de a + b é

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12

05. (UFOP-MG–2007) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^{99} - 2x + 3$ pelo polinômio $q(x) = x^2 - 1$ é

A) –x + 3 B) 6 C) 8 D) 3x – 1

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (Unifor-CE) Se os polinômios

$f(x) = x^3 + (a - b)x^2 + (a - b - 2)x + 4$ e

$g(x) = x^3 + 2ax^2 + (3a - b)$

são idênticos, então

A) $a^b = 3$ C) b = 3a E) ab = –1
B) a = 3b D) $\frac{a}{b} = 1$

02. (UFMG) Considere o polinômio:

$p(x) = (x - 1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4)$

O polinômio p(x) é igual a

A) $x^4(x^3 - 1)(x^3 + 1)$ C) $x^4(x^3 - 1)^2$
B) $x^4(x^6 - 2x^4 + 1)$ D) $x^4(x^6 - 2x^2 + 1)$

03. (UFMG) Considere os polinômios:

$p(x) = ax^3 + (2a - 3b)x^2 + (a + b + 4c)x - 4bcd$ e $q(x) = 6x^2 + 18x + 5$, em que **a**, **b**, **c** e **d** são números reais. Sabe-se que p(x) = q(x), para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim sendo, o número **d** é igual a

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) 3

04. (UFMG) Sejam $P(x) = x^2 - 4$ e $Q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + a$, em que Q(2) = 0. O resto da divisão de Q(x) por P(x) é

A) –x – 2 C) x + 2 E) –9x + 18
B) 9x – 18 D) 0

05. (PUC Rio) Se $x^2 + 2x + 5$ divide $x^4 + px^2 + q$ exatamente (isto é, o resto da divisão do segundo polinômio pelo primeiro é zero), então

A) p = –2 e q = 5 D) p = 6 e q = 25
B) p = 5 e q = 25 E) p = 14 e q = 25
C) p = 10 e q = 20

06. (UFJF-MG) Ao dividirmos um polinômio p(x) por outro polinômio q(x), encontramos um resto r(x) = x – 1. É **CORRETO** afirmar que o

A) grau de p(x) é igual a 2.
B) grau de q(x) é igual a 2.
C) grau de q(x) é maior que 1.
D) grau de p(x) é igual a 1.

07. (UFES) O polinômio P(x), quando dividido por $x^2 + x + 1$, fornece o quociente x + 1 e o resto x – 1. O coeficiente do termo do primeiro grau no polinômio P(x) é

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

08. (UFMG) Os valores de **m** e **n**, para os quais o resto da divisão de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + mx + n$ por $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ seja 2x + 1, são

A) m = 9 e n = –1 D) m = 2 e n = 1
B) m = –3 e n = 7 E) m = –6 e n = 2
C) m = 2 e n = 3

09. (UFMG) O quociente do polinômio $p(x) = x^4 + a^2x^2 + a^4$ pelo polinômio $q(x) = x^2 - ax + a^2$, $a \in \mathbb{R}$, é

A) $x^2 - ax + a$ D) $x^2 + ax + a$
B) $x^2 - ax + a^2$ E) $x^2 + ax + a^2$
C) $x^2 - a^2x + a$

10. (UFTM-MG) Sendo **k** um número real e $P(x) = -x^5 + 2x^3 - x^2 + k^2$ um polinômio divisível pelo polinômio $D(x) = x^3 + 1$, pode-se concluir que k^2 é um número

A) natural.
B) inteiro negativo.
C) racional não inteiro.
D) irracional.
E) imaginário puro.

11. (UFV-MG) O resto da divisão do polinômio $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + mx + n$ pelo polinômio $q(x) = x^2 - 2x + 1$ é $r(x) = 3x + 2$. Então, o produto mn é igual a

A) 32 B) −32 C) −16 D) 16 E) 12

12. (UFF-RJ) As raízes de um polinômio P(x) de grau 3 são **r**, **s** e **t**. Então, as raízes do polinômio $Q(x) = [P(x)]^2$ são

A) r^2, s^2, t^2
B) 2r, 2s, 2t
C) **r**, **s**, **t**
D) $\frac{r}{2}, \frac{s}{2}, \frac{t}{2}$
E) r − 2, s − 2, t − 2

13. (UFRGS) Sabendo-se que o polinômio $x^4 + 4x^3 + px^2 + qx + r$ é divisível por $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$, segue que **p** é igual a

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

14. (UFPR–2007) Sabendo-se que o polinômio $p(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - a$ é divisível pelo polinômio $q(x) = x^2 + 1$, é **CORRETO** afirmar:

A) $2a + b = -2$
B) $a + 2b = \frac{1}{2}$
C) $a - 2b = 0$
D) $2a - b = \frac{1}{4}$
E) $a - b = -1$

SEÇÃO ENEM

01. Ao estudar a variação entre os valores de duas grandezas **P** e **X**, um pesquisador concluiu que a relação matemática que caracterizava essa variação era dada pelo polinômio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que **x** era o valor da grandeza **X** e P(x) era o valor correspondente da grandeza **P**. Parte dos dados coletados pelo pesquisador encontram-se a seguir:

X	P
0	2
1	5
2	10

Com base nas informações apresentadas, pode-se afirmar que o valor do coeficiente **a** é

A) −3 B) −2 C) 0 D) 2 E) 3

02. Observe a notícia a seguir:

Robô-bombeiro feito no Brasil ensaia entrada no mercado internacional

Por Guilherme Felitti, repórter do IDG Now! Publicada em 19 de out. de 2006 às 18h19 Atualizada em 20 de out. de 2006 às 11h17

São Paulo – Desenvolvido em Fortaleza para combater incêndios, SACI já é testado pela Petrobrás e desperta interesses nos EUA, Índia e Austrália.

Além de dálmatas, bombeiros poderão ter outra companhia dentro das brigadas a partir de 2007, com funções mais interessantes que os cães malhados.

O robô-bombeiro SACI, construído como projeto de conclusão por um grupo do curso de Engenharia da Computação da Universidade de Fortaleza, deverá começar a ganhar o mundo já no próximo ano.

Já usado em testes dentro da Petrobrás, o robô, que tem a sigla de Sistema de Apoio ao Combate de Incidentes como nome, está em sua terceira versão e será vendido para a Brigada de Chicago até o final do ano.

"O Corpo de Bombeiros da cidade entrou em contato para adquirir uma unidade que subisse escadas", afirma Roberto Macedo, diretor técnico de pesquisa e desenvolvimento da Armtec, responsável pelo SACI.

Considere que o robô descrito anteriormente se desloque ao longo do gráfico do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. O sistema cartesiano de eixos foi posicionado de modo que as raízes reais desse polinômio indicam possíveis focos de incêndio, os quais serão combatidos pelo robô. Portanto, pode-se afirmar que o robô bombeiro será utilizado

A) Nenhuma vez
B) uma vez.
C) duas vezes.
D) três vezes.
E) quatro vezes.

GABARITO

Fixação

01. D 02. C 03. D 04. C 05. A

Propostos

01. E 02. A 03. A 04. B 05. D 06. C 07. D 08. B 09. E 10. A 11. B 12. C 13. D 14. A

Seção Enem

01. B 02. D

MATEMÁTICA

Polinômios II

MÓDULO 18 — FRENTE E

TEOREMA DO RESTO

> O resto da divisão de P(x) por um binômio ax + b é $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Podemos verificar esse fato facilmente. Temos:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & ax+b \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$

Podemos escrever na forma $P(x) \equiv (ax + b).Q(x) + R$.

Para $x = -\frac{b}{a}$, temos:

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a.\left(-\frac{b}{a}\right) + b\right].Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R \Rightarrow$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = (-b + b).Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R \Rightarrow$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.Q\left(-\frac{b}{a}\right) + R \Rightarrow$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

> Em outras palavras, para encontrarmos o resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio do 1º grau, basta calcularmos a raiz do binômio do 1º grau e, em seguida, substituirmos no polinômio P(x).

Exemplo

Calcular o resto da divisão do polinômio

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 5$ por $B(x) = x - 1$.

Resolução:

Cálculo da raiz de B(x):

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

O resto **R** é dado por:

$R = P(1) = 3.1^3 + 4.1^2 - 1 + 5 \Rightarrow$

$R = 3 + 4 - 1 + 5 = 11$

TEOREMA DE D'ALEMBERT

> P(x) é divisível por ax + b se, e somente se, $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Observe que o Teorema de D'Alembert é uma consequência imediata do Teorema do Resto. Eis a demonstração:

Seja $P(x) = (ax + b).Q(x) + R$.

Conforme vimos anteriormente, fazendo $x = -\frac{b}{a}$, temos $P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$.

Porém, o polinômio P(x) é divisível por ax + b se, e somente se, **R** for igual a zero.

Desse modo, o teorema está demonstrado.

DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

É um dispositivo prático que permite determinar o quociente e o resto da divisão de um polinômio P(x) por um binômio da forma x − a. Como exemplo, vamos efetuar a divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$ por $B(x) = x - 2$.

Inicialmente, vamos posicionar os termos indicados, conforme o esquema a seguir:

Raiz do divisor	Coeficientes do dividendo	
	Coeficientes do quociente	Resto

Assim, temos:

2	1	3	−1	4

Repetimos o coeficiente do termo de maior grau.

2	1	3	−1	4
	1			

Multiplicamos essa raiz (2) pelo coeficiente que foi repetido (1) e, em seguida, somamos com o próximo coeficiente (3). O resultado é colocado à direita de 1.

Fazemos 2.1 + 3 = 5.

2	1	3	–1	4
	1	5		

Repetimos o processo, agora com o último termo obtido (5).

Fazemos 2.5 – 1 = 9.

2	1	3	–1	4
	1	5	9	

Finalmente, repetimos para o termo 9. Assim, obtemos o último termo, separado por uma linha tracejada. Esse número é o resto da divisão de P(x) por B(x).

Fazemos 2.9 + 4 = 22.

2	1	3	–1	4
	1	5	9	22

Os números obtidos (1, 5 e 9) são os coeficientes do polinômio quociente. Como P(x) é do 3º grau e B(x) é do 1º grau, o dividendo deverá ser, necessariamente. do 2º grau. Por isso, costumamos dizer que o Dispositivo de Briot-Ruffini serve para abaixar o grau do polinômio P(x). Mais à frente, veremos uma importante aplicação desse fato no cálculo de raízes de equações. Portanto, temos o quociente $Q(x) = x^2 + 5x + 9$ e o resto R(x) = 22.

OBSERVAÇÃO

Podemos utilizar o Método de Briot-Ruffini também quando o divisor é um polinômio da forma ax + b. Nesse caso, devemos dividir os coeficientes do polinômio quociente por **a.**

Exemplo

Efetuar a divisão de $P(x) = 5x^3 + x^2 - 2x + 1$ por 2x – 4.

Resolução:

A raiz do binômio do 1º grau é igual a 2. Assim, temos:

2	5	1	–2	1
	5	11	20	41

Para obtermos o polinômio quociente, devemos dividir cada termo obtido por 2. É importante observar que o resto não se altera. Assim, temos como quociente

$Q(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$ e resto R(x) = 41.

TEOREMA DA DIVISÃO PELO PRODUTO

Um polinômio P(x) é divisível por (x – a)(x – b) se, e somente se, P(x) é divisível separadamente por x – a e por x – b.

Demonstração:

Se P(x) é divisível por (x – a)(x – b), podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-a)(x-b) \\ \hline 0 & Q(x) \end{array}$$

Em que Q(x) é o polinômio quociente.

Logo, temos P(x) = (x – a)(x – b).Q(x).

Pelo Teorema de D'Alembert, P(x) é divisível por x – a se, e somente se, P(a) = 0.

Assim, temos P(a) = (a – a)(a – b).Q(a) = 0.

Logo, P(x) é divisível por x – a.

Analogamente, P(x) será divisível por x – b se, e somente se, P(b) = 0.

Assim, temos que P(b) = (b – a)(b – b).Q(b) = 0.

Logo, P(x) é divisível por x – b.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. (FGV-SP) Se o polinômio $x^3 - 2mx^2 + (-m + 6)x + 2m + n$ é divisível por x – 1 e por x + 1, então m + n é igual a

A) 7 B) –7 C) 6 D) –6 E) 0

Resolução:

Pelo Teorema de D'Alembert, temos P(1) = 0 e P(–1) = 0. Assim:

$P(-1) = (-1)^3 - 2m(-1)^2 + (-m + 6)(-1) + 2m + n \Rightarrow$

$0 = -1 - 2m + m - 6 + 2m + n \Rightarrow m + n = 7$

Observe que não foi necessário fazer P(1) = 0, pois a pergunta envolvia m + n.

02. (Mackenzie-SP)

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-2 \\ \hline 4 & Q(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} Q(x) & x-6 \\ \hline 1 & Q_1(x) \end{array}$$

Considerando as divisões de polinômios dadas, podemos afirmar que o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 8x + 12$ é

A) 2x + 2
B) 2x + 1
C) x + 2
D) 3x – 2
E) x + 1

Resolução:

Podemos escrever do seguinte modo:

P(x) = (x – 2).Q(x) + 4 e

$Q(x) = (x - 6).Q_1(x) + 1$

Substituindo a expressão para Q(x) em P(x), temos:

$P(x) = (x - 2)[(x - 6).Q_1(x) + 1] + 4 \Rightarrow$

$P(x) = (x - 2).(x - 6).Q_1(x) + x - 2 + 4 \Rightarrow$

$P(x) = (x^2 - 8x + 12).Q_1(x) + x + 2$

Logo, o resto da divisão de P(x) por $x^2 - 8x + 12$ é igual a (x + 2).

03. Um polinômio P(x) deixa resto 1 quando dividido por x − 1 e deixa resto 4 quando dividido por x + 2. Determinar o resto da divisão do polinômio P(x) por (x − 1)(x + 2).

Resolução:

Vamos representar os dados da seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-1 \\ \hline 1 & Q_1(x) \end{array}$$ Pelo Teorema do Resto, temos que P(1) = 1.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x+2 \\ \hline 4 & Q_2(x) \end{array}$$ Pelo Teorema do Resto, temos que P(−2) = 4.

Agora, observe que (x − 1)(x + 2) é um polinômio do segundo grau. Na divisão de P(x) por (x − 1)(x + 2), o grau do resto deve ser menor do que o grau do divisor. Portanto, o resto R(x) é da forma R(x) = ax + b, em que **a** e **b** são números reais.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & (x-1)(x+2) \\ \hline ax+b & Q_3(x) \end{array}$$

$P(x) = (x - 1)(x + 2).Q_3(x) + ax + b$

Fazendo x = 1, temos:

$P(1) = (1 - 1)(1 + 2).Q_3(1) + a.1 + b \Rightarrow$

$1 = a + b$

Fazendo x = −2, temos:

$P(-2) = (-2 - 1)(-2 + 2).Q_3(-2) + a(-2) + b \Rightarrow$

$4 = -2a + b$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a+b=1 \\ -2a+b=4 \end{cases}$, temos a = −1 e b = 2.

Portanto, o resto é igual a R(x) = −x + 2.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFJF-MG / Adaptado) Um polinômio P(x), quando dividido pelo polinômio $q(x) = x^2 - 4$, deixa resto r(x) = 3x + 5. Então, o resto da divisão de P(x) por x + 2 é igual a

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1

02. (FUVEST-SP) Dividindo-se o polinômio p(x) por $2x^2 - 3x + 1$, obtêm-se quociente $3x^2 + 1$ e resto −x + 2. Nessas condições, o resto da divisão de p(x) por x − 1 é

A) 2 B) 1 C) 0 D) −1 E) −2

03. (UFJF-MG) Na divisão de um polinômio P(x) pelo binômio (x + a) usou-se o Dispositivo prático de Briot-Ruffini e encontrou-se:

−2	1	p	−3	4	−5
	q	−4	5	r	7

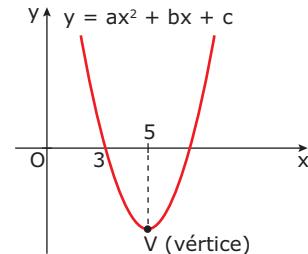
Os valores de **r**, **q**, **p** e **a** são, respectivamente,

A) 6, 1, −6, −2
B) −6, −2, −2, 2
C) −6, 1, −2, 2
D) −6, −2, 1, 2
E) 4, 1, −4, 2

04. (FUVEST-SP) Seja p(x) um polinômio divisível por x − 3. Dividindo-se p(x) por x − 1, obtemos quociente q(x) e resto r = 10. O resto da divisão de q(x) por x − 3 é

A) −5 B) −3 C) 0 D) 3 E) 5

05. (FUVEST-SP–2009) O polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$, em que **a** e **b** são números reais, tem restos 2 e 4 quando dividido por x − 2 e x − 1, respectivamente. Assim, o valor de **a** é

A) −6 B) −7 C) −8 D) −9 E) −10

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (PUC Minas) O resto da divisão de $P(x) = ax^3 - 2x + 1$ por Q(x) = x − 3 é 4. Nessas condições, o valor de **a** é

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$

02. (UFJF-MG–2006) O polinômio p(x) é divisível por x + 3, por x − 1 e por x + 5. Podemos dizer que o seu grau **g** é

A) g > 3
B) g < 3
C) g ≥ 3
D) g = 3
E) g ≤ 3

03. (UEL-PR) Sobre um polinômio p(x) de grau 1, sabe-se que

I. sua raiz é igual a 2

II. p(−2) é igual ao dobro de sua raiz

Nessas condições, é **CORRETO** afirmar:

A) p(x) = −x + 2
B) p(x) = 2x − 4
C) p(x) = x − 2
D) $p(x) = x^2 - x - 2$
E) $p(x) = -x^2 + x + 2$

04. (UNIFESP) Dividindo-se os polinômios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ por x − 2, obtêm-se, respectivamente, r_1 e r_2 como restos. Sabendo-se que r_1 e r_2 são os zeros da função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, conforme gráfico,

o resto da divisão do polinômio produto $p_1(x).p_2(x)$ por x − 2 é

A) 3 B) 5 C) 8 D) 15 E) 21

05. (PUCPR) Se o polinômio $x^4 + px^2 + q$ é divisível pelo polinômio $x^2 - 6x + 5$, então p + q vale

A) −1 B) 3 C) 5 D) −4 E) 10

06. (PUC RS) A divisão do polinômio $p(x) = x^5 - 2x^4 - x + m$ por q(x) = x − 1 é exata. O valor de **m** é

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

MATEMÁTICA

07. (Mackenzie-SP) Observando a divisão dada, de polinômios, podemos afirmar que o resto da divisão de P(x) por x + 1 é

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x^2 - x - 2 \\ \hline 2x - 1 & Q(x) \end{array}$$

A) −1 B) −2 C) 2 D) 3 E) −3

08. (AFA-SP) O parâmetro **a**, de modo que o resto da divisão de $5x^3 + (2a - 3)x^2 + ax - 2$ por $x + 2$ seja 6, é igual a

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12

09. (UFLA-MG–2009) O polinômio $x^3 + ax^2 + x + b$ é divisível por $x^2 + 2x - 3$. Então, o valor de $a - b$ é

A) 2 B) −10 C) 10 D) −2

10. (UFJF-MG) O resto da divisão do polinômio $p(x) = 3x^2 - 17x + 27$ por $q(x) = x - 4$ é

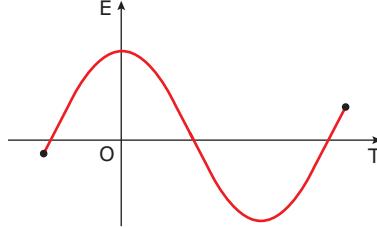
A) 4 B) 7 C) 2x D) 5 E) 5x − 20

11. (ITA-SP) A divisão de um polinômio P(x) por $x^2 - x$ resulta no quociente $6x^2 + 5x + 3$ e resto $-7x$. O resto da divisão de P(x) por $2x + 1$ é igual a

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. (UFJF-MG) Um polinômio p(x) dividido por x − 1 deixa resto 2. O quociente desta divisão é, então, dividido por x − 4, obtendo resto 1. O resto da divisão de p(x) por (x − 1)(x − 4) é

A) 1 B) 2 C) x + 1 D) x − 1

13. (UFMG) O polinômio $P(x) = x^4 + mx^2 + n$ é divisível por $x^2 - 4$ e também por $x^2 - 3$. O valor do produto mn é

A) −84 B) −12 C) −1 D) 12 E) 14

14. (UFMG) O polinômio $P(x) = 3x^5 - 3x^4 - 2x^3 + mx^2$ é divisível por $Q(x) = 3x^2 - 2x$. O valor de **m** é

A) −2 B) $-\frac{3}{8}$ C) $\frac{16}{9}$ D) 2 E) 4

SEÇÃO ENEM

01. Um pesquisador estudou a variação entre duas grandezas **E** e **T**. Os resultados da sua pesquisa encontram-se no gráfico a seguir:

Sabe-se que E(T) é uma função polinomial de **T**. Portanto, é possível afirmar que

A) E(T) é um polinômio do 3º grau.

B) E(T) é uma função periódica.

C) E(T) possui grau maior ou igual a 3.

D) E(T) é uma função injetora.

E) E(T) é uma função par.

02. Uma importante área da Matemática é a chamada Pesquisa Operacional (PO). Trata-se de um conjunto de técnicas de modelagem matemática aplicado a diversos problemas práticos. Atualmente, a Pesquisa Operacional é bastante utilizada para a maximização do lucro de empresas. Considere que um profissional da área de Pesquisa Operacional tenha efetuado a modelagem da maximização do lucro de uma empresa. Na sua pesquisa, ele descobriu que havia dois valores correspondentes à produção **x** para os quais o lucro seria nulo. O menor desses valores não é suficiente para atingir uma região de lucratividade, pois o valor adquirido com a venda do produto é o mesmo gasto para produzi-lo, e o maior desses valores eleva muito o custo da produção, devido à necessidade de aquisição de equipamentos, e também não gera lucro. Após analisar os dados, ele obteve uma expressão que descreve o lucro L(x) dessa empresa em função do número de toneladas produzidas **x**. A expressão é a seguinte:

$$L(x) = \frac{-x^3 + 8x^2 - 19x + 12}{x - 1}$$

Diante disso, o número de toneladas a serem produzidas, a fim de que a empresa tenha a máxima lucratividade, é igual a

A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5

GABARITO

Fixação

01. B
02. B
03. C
04. A
05. A

Propostos

01. A	08. B
02. C	09. C
03. A	10. B
04. E	11. E
05. A	12. C
06. E	13. A
07. E	14. C

Seção Enem

01. C 02. B

MATEMÁTICA

MÓDULO 19 FRENTE E

Equações polinomiais I

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Chamamos de equação algébrica ou equação polinomial a toda equação na variável **x** que pode ser escrita na forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

em que os coeficientes a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 são números complexos e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

1º) $x^2 - 4x + 8 = 0$

2º) $5x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

RAÍZES OU ZEROS DE UMA EQUAÇÃO POLINOMIAL

Dizemos que um número complexo **a** é raiz de uma equação polinomial do tipo $P(x) = 0$ se, e somente se, $P(a) = 0$. Por exemplo, a equação $2x^3 - x^2 + 4x - 5 = 0$ admite 1 como raiz, pois $2.1^3 - 1^2 + 4.1 - 5 = 2 - 1 + 4 - 5 = 0$.

Portanto, para verificarmos se um determinado número complexo é raiz de uma equação, devemos substituir a variável por esse número e verificar se a igualdade é satisfeita.

CONJUNTO SOLUÇÃO OU VERDADE

Chamamos de conjunto solução de uma equação $P(x) = 0$, em um determinado conjunto universo **U**, ao conjunto formado por todas as raízes dessa equação. Resolver uma equação significa determinar o seu conjunto solução.

Exemplos

1º) Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

Resolução:

$\Delta = 1^2 - 4.1.2 = 1 - 8 = -7$

No conjunto $\mathbb{R}$, a equação não apresenta soluções, ou seja, $S = \varnothing$.

2º) Resolver, em $\mathbb{C}$, a equação $x^2 + x + 2 = 0$.

Resolução:

$\Delta = 1^2 - 4.1.2 = 1 - 8 = -7$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

Portanto, no conjunto dos números complexos, o conjunto solução é dado por $S = \left\{\frac{-1 - \sqrt{7}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}\right\}$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

> Toda equação de grau **n**, $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Esse teorema foi enunciado no final do século XVIII pelo matemático Carl Friedrich Gauss. Uma das consequências mais importantes desse teorema é a seguinte:

> Um polinômio de grau **n**, $n \geq 1$, possui **n** raízes complexas.

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, podemos afirmar que existe pelo menos uma raiz complexa. Sendo k_1 essa raiz, temos $P(k_1) = 0$.

Logo, o polinômio $P(x)$ é divisível pelo polinômio $x - k_1$ (Teorema de D'Alembert).

Portanto, podemos escrever o seguinte:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x - k_1 \\ \hline 0 & Q_1(x) \end{array} \Rightarrow P(x) = (x - k_1).Q_1(x)$$

Observe que, para $P(x) = 0$, temos que $x - k_1 = 0$ ou $Q_1(x) = 0$. Portanto, podemos concluir que as raízes de $Q_1(x)$ também são raízes de $P(x)$.

Podemos proceder de maneira análoga ao analisarmos o polinômio $Q_1(x)$.

Sendo k_2 uma raiz de $Q_1(x)$, podemos escrever:

$$Q_1(x) = (x - k_2).Q_2(x)$$

Substituindo na expressão para P(x), obtemos:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).Q_2(x)$$

Aplicando sucessivamente esse raciocínio, obtemos:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3). \dots .(x - k_n).Q_n(x)$$

Em que $Q_n(x)$ é um polinômio de grau zero. Observe que o coeficiente de x_n em $P(x)$ é a_n. Logo, temos $Q_n(x) = a_n$.

Portanto:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3). \dots .(x - k_n).a_n$$

Essa é a chamada forma fatorada do polinômio P(x).

TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Como consequência do exposto, enunciamos a seguir o chamado Teorema da Decomposição.

Um polinômio P(x) de grau **n**, $n \geq 1$, pode ser decomposto em **n** fatores do 1º grau, ou seja, pode ser escrito na forma:

$$P(x) = (x - k_1).(x - k_2).(x - k_3). \dots .(x - k_n).a_n$$

Observe que uma consequência imediata desse teorema é que toda equação de grau **n**, $n \geq 1$, possui **n** raízes complexas, distintas ou não.

OBSERVAÇÃO

Consideremos o polinômio P(x) de grau **n**, $n \geq 1$. Sabemos que esse polinômio pode ser decomposto em **n** fatores do 1º grau. Suponhamos que um mesmo número seja raiz de **k** fatores de P(x), $k \leq n$. Dizemos que esse número é uma raiz de multiplicidade **k** do polinômio P(x).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Resolver a equação $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$.

Resolução:

Fatorando a equação, temos:

$x^2(x - 3) + 4(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(x^2 + 4) = 0$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x^2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \pm 2i \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por $S = \{-2i, 2i, 3\}$.

02. Determinar a multiplicidade de cada uma das raízes na equação $(x - 5)^3(x + 2)(x - 7)^4 = 0$.

Resolução:

Observe que existem 3 fatores que possuem raiz igual a 5. Portanto, a multiplicidade da raiz 5 é igual a 3.

Existe um único fator que possui raiz –2. Logo, a raiz –2 possui multiplicidade igual a 1 (raiz simples).

Existem 4 fatores que possuem 7 como raiz. Logo, a multiplicidade da raiz 7 é igual a 4.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFJF-MG) Marque a alternativa **CORRETA**.

A) Se **a** e **b** são raízes da equação algébrica $p(x) = 0$, então o grau de p(x) é exatamente 2.

B) Toda equação algébrica de grau $n \geq 1$ com coeficientes reais admite **n** raízes reais.

C) Se **a**, **b** e **d** são três raízes da equação algébrica $p(x) = 0$ de grau **n**, então $n > 2$.

D) Se $p(x) = 0$ é uma equação algébrica de grau 3 cujas raízes são **a**, **b** e **d**, então $p(x) = (x - a)(x - b)(x - d)$.

02. (UFOP-MG) Considere a equação $7x(x - 1)^2(2x - 2) = 0$. Então, podemos afirmar que

A) 1 é raiz tripla.

B) 1 é raiz dupla.

C) 1 é raiz simples.

D) –1 é raiz dupla.

E) –1 é raiz tripla.

03. (UFOP-MG) Se $p(x) = x^2(x^2 + 1)(x - 1)^2$, então a equação $p(x) = 0$ admite

A) 8 raízes reais simples.

B) 6 raízes reais simples.

C) 3 raízes reais duplas.

D) 2 raízes reais duplas.

04. (FUVEST-SP) Sabendo-se que p(x) é um polinômio, **a** é uma constante real e $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + \frac{a \cos x}{2 + x^2}$ é uma identidade em **x**, **DETERMINE**

A) o valor da constante **a**. **JUSTIFIQUE** sua resposta.

B) as raízes da equação p(x) = 0.

05. (Unicamp-SP) Seja $p(x) = x^3 - 12x + 16$.

A) **VERIFIQUE** que x = 2 é raiz de p(x).

B) **USE** fatoração para mostrar que se x > 0 e x ≠ 2, então p(x) > 0.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP) O número de pontos de interseção dos gráficos das funções reais $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$ e $g(x) = \frac{x^2+4}{x^2+3}$ é

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

02. (PUC Minas) Sendo $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ e $q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$, nota-se que p(1) = q(1) = 0. A forma mais simples da fração $\frac{p(x)}{q(x)}$ é

A) $\frac{x+1}{x-2}$
B) $\frac{x-2}{x+1}$
C) $\frac{x-1}{x-2}$
D) $\frac{x-1}{x+2}$
E) $\frac{x+1}{x+2}$

03. (UCS-RS) Sabe-se que o polinômio $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$ é divisível por $g(x) = x^2 - 2x + 3$. Se q(x) é o quociente da divisão de f(x) por g(x), quais são as raízes de q(x)?

A) 1 e –1
B) 3 e –3
C) 1 e –3
D) –1 e 3
E) –1 e –3

04. (PUC-SP) O número de raízes reais do polinômio $p(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$ é

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

05. (PUC Minas) A equação de terceiro grau cujas raízes são 1, 2 e 3 é

A) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
B) $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$
C) $x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0$
D) $x^3 + x^2 + 2x + 3 = 0$
E) $x^3 + 6x^2 - 11x + 5 = 0$

06. (UFRN) Uma das soluções da equação $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ é

A) –1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –5

07. (Cesgranrio) Sejam **a** e **b**, respectivamente, a maior e a menor das raízes de $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$. A diferença a – b vale

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

08. (UFRN) Seja $P(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$. Se P(2) = 0, então o conjunto solução de P(x) = 0 é

A) {–2, –3, –5}
B) {2, –3, –5}
C) {2, –2, –2}
D) {2, 3, 5}
E) {2, 6, 30}

09. (UFRGS) A raiz da equação $(1 - \sqrt{2})x^3 - 1 - \sqrt{2} = 0$ é

A) $1 - \sqrt{2}$
B) $1 + \sqrt{2}$
C) $(1 + \sqrt{2})^6$
D) $-(1+\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}$
E) $-(\sqrt{2}-1)^{\frac{2}{3}}$

10. (Cesgranrio) A soma das raízes da equação $\frac{x}{5} = \frac{x^2}{105}$ vale

A) 5 B) 10 C) 15 D) 18 E) 21

11. (Cesgranrio) O produto das raízes da equação $(9x^2 - 1)(25x - 1) = 0$ vale

A) $-\frac{1}{34}$
B) $-\frac{1}{625}$
C) $-\frac{1}{225}$
D) $\frac{1}{625}$
E) $\frac{1}{225}$

MATEMÁTICA

12. (UFPR) Dadas as equações $x^2 + x + 1 = 0$ e $x^3 - 1 = 0$, podemos afirmar que

A) apenas uma das raízes de $x^2 + x + 1 = 0$ satisfaz $x^3 - 1 = 0$.

B) a soma das raízes de $x^2 + x + 1 = 0$ satisfaz $x^3 - 1 = 0$.

C) as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$ satisfazem $x^3 - 1 = 0$.

D) as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$ não satisfazem $x^3 - 1 = 0$.

E) as raízes da equação $x^3 - 1 = 0$ estão em progressão aritmética.

13. (FCMSC-SP) Os valores reais de **p** e **q** para os quais a equação $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + px + q = 0$ admite uma raiz de multiplicidade 3 são, respectivamente,

A) 3 e 4

B) $\frac{4}{3}$ e –8

C) 4 e $-\frac{8}{3}$

D) $-\frac{1}{3}$ e 4

E) N.d.a.

14. (PUC-SP) Em relação ao polinômio $p(x) = (x - 1)^2(x^2 - 1)$, o que se pode afirmar sobre o número 1?

A) É raiz simples.

B) É raiz dupla.

C) É raiz tripla.

D) É raiz quádrupla.

E) Não é raiz.

15. (UFV-MG–2009) Considere os conjuntos numéricos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \text{ e } 2 - x \leq 2x\}$ e

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0\}$

O número total de subconjuntos do conjunto interseção $A \cap B$ é

A) 8

B) 4

C) 2

D) 1

SEÇÃO ENEM

01. Um professor de Matemática propôs à turma a seguinte questão:

Resolver a equação $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Diante da dificuldade da turma, o professor forneceu uma dica:

"Sabe-se que $x = 1$ é solução dessa equação."

Com base nessas afirmações, é possível afirmar que

A) a soma das raízes da equação é igual a 3.

B) a equação admite apenas uma raiz real.

C) a equação admite uma raiz dupla.

D) o produto das raízes da equação é igual a 2.

E) as outras duas raízes são irracionais.

02. Uma viga possui o formato de um prisma quadrangular regular. Sabe-se que essa viga é maciça e que suas dimensões, em metros, são também soluções da equação polinomial $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0$.

Portanto, pode-se afirmar que o volume dessa viga, em m³, é igual a

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

GABARITO

Fixação

01. C
02. A
03. D
04. A) a = 0
    B) S = {0, 1, 2}
05. A) Verifique que P(2) = 0
    B) Demonstração

Propostos

01. A	06. B	11. C
02. C	07. A	12. C
03. D	08. B	13. C
04. C	09. D	14. C
05. A	10. E	15. B

Seção Enem

01. C 02. B

MATEMÁTICA

MÓDULO 20 FRENTE E

Equações polinomiais II

RELAÇÕES DE GIRARD

São as relações estabelecidas entre as raízes e os coeficientes da equação algébrica P(x) = 0. Vamos estudá-las caso a caso.

1º caso: Equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Sejam x_1 e x_2 suas raízes.

As relações entre essas raízes são as seguintes:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

2º caso: Equação do 3º grau

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com $a \neq 0$.

Sejam x_1, x_2 e x_3 suas raízes.

As relações entre essas raízes são as seguintes:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$(x_1.x_2) + (x_1.x_3) + (x_2.x_3) = \frac{c}{a}$$

$$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$$

Generalizando para uma equação do grau **n**, n ≥ 1, temos:

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$

Em que $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ são as suas raízes.

As relações de Girard são:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(x_1.x_2) + (x_1.x_3) + ... + (x_{n-1}.x_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$(x_1.x_2.x_3) + (x_1.x_2.x_4) + ... (x_{n-2}.x_{n-1}.x_n) = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

....

$$x_1.x_2.x_3 ... x_n = (-1)^n.\frac{a_0}{a_n}$$

Exemplos

1º) Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $x^2 - x + 4 = 0$. Calcular

A) $x_1 + x_2$

Resolução:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$$

B) $x_1.x_2$

Resolução:

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

C) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

Resolução:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1.x_2} = \frac{1}{4}$$

D) $x_1^2 + x_2^2$

Resolução:

$x_1 + x_2 = 1$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$$(x_1 + x_2)^2 = 1^2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1.x_2 + x_2^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + 2.4 + x_2^2 = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = -7$$

2º) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação:

$2x^3 - 6x^2 + 2x - 1 = 0$

Calcular

A) $x_1 + x_2 + x_3$

Resolução:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

B) $x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3$

Resolução:

$$x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3 = \frac{c}{a} = \frac{2}{2} = 1$$

C) $x_1.x_2.x_3$

Resolução:

$$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

D) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

Resolução:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2.x_3 + x_1.x_3 + x_1.x_2}{x_1.x_2.x_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

E) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Resolução:

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 3^2 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\underbrace{(x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3)}_{1} = 9 \Rightarrow$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2.1 = 9 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 7$$

TEOREMA DAS RAÍZES COMPLEXAS

> Se uma equação P(x) = 0, com coeficientes reais, possui uma raiz complexa a + bi (b ≠ 0), então o seu conjugado a − bi também é raiz desse polinômio.

Observe algumas consequências imediatas desse teorema:

i) As raízes complexas sempre aparecem aos pares.

ii) Se o grau de um polinômio é ímpar, então esse polinômio possui pelo menos uma raiz real.

PESQUISA DE RAÍZES RACIONAIS

Em determinadas situações, podemos pesquisar acerca da existência de uma raiz racional de uma equação da forma P(x) = 0, baseados na seguinte propriedade:

> Caso o número $\frac{p}{q}$ seja uma raiz racional irredutível da equação algébrica $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ de coeficientes inteiros, com $a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$, podemos afirmar que **p** é divisor de a_0, e **q** é divisor de a_n.

Exemplo

Resolver a equação $x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Resolução:

Efetuando a pesquisa de raízes racionais, temos:

i) **p** é um divisor de 2, ou seja, **p** pode ser igual a −2, −1, 1 ou 2.

ii) **q** é um divisor de 1, ou seja, **q** pode ser igual a −1 ou 1.

Portanto, a fração $\frac{p}{q}$ pode assumir os seguintes valores: −2, −1, 1 ou 2

Entre esses valores, verificamos que 1 é raiz. Portanto, o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ é divisível pelo polinômio x − 1. Ao efetuarmos a divisão desses polinômios pelo Método de Briot-Ruffini (abaixamento do grau do polinômio), encontraremos um polinômio quociente cujas raízes são também raízes de P(x). Portanto, temos o seguinte:

1	1	2	−5	2
	1	3	−2	0

O quociente é dado por $Q(x) = x^2 + 3x - 2$.

Calculando as raízes de Q(x), temos:

$x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4.1.(-2) = 17$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Portanto, o conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, 1\right\}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (Cesgranrio) Se **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$, então o valor da expressão $a^2bc + ab^2c + abc^2$ é igual a

A) 400
B) 200
C) −100
D) −200
E) −400

02. (UFOP-MG) Sabendo que −1 é raiz da equação polinomial $6x^3 + 5x^2 + kx - 1 = 0$ e denominando de **a** e **b** as outras raízes dessa equação, pode-se afirmar que $a^2 + b^2$ vale

A) −1
B) 1
C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{13}{36}$

03. (UFOP-MG–2009) Considere o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 - 14x^2 + 2x + 24$. Sabendo-se que o produto de duas raízes de p(x) é −12, o produto das outras duas raízes é

A) −2
B) 2
C) 4
D) −4

04. (UFMG) Os números −1 e 1 são duas raízes do polinômio $p(x) = cx^3 + ax^2 + bx + 2c$. A terceira raiz de p(x) é

A) −3
B) −2
C) 0
D) $\frac{1}{2}$
E) 2

05. (Mackenzie-SP) Se a soma de duas raízes de $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + k$ é 3, então o número real **k** é igual a

A) −6
B) −3
C) −2
D) 3
E) 6

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FUVEST-SP) Seja $p(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as quatro raízes de p(x) são inteiras e que três delas são pares e uma é ímpar. Quantos coeficientes pares tem o polinômio p(x)?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

02. (UFJF-MG) Seja **S** a soma das raízes do polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais e $a \neq 0$. Se S_1 é a soma das raízes de $p(x - 1)$, então a diferença $S_1 - S$ é

A) −1
B) 0
C) 1
D) 2

03. (FUVEST-SP) Se a equação $8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ tem raízes reais **a** e −a, então o valor de **k** é

A) $\frac{9}{4}$
B) 2
C) $\frac{9}{8}$
D) −2
E) −4

04. (UFSCar-SP) Sabendo-se que a soma de duas das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ é igual a 5, pode-se afirmar a respeito das raízes que

A) são todas iguais e não nulas.
B) somente uma raiz é nula.
C) as raízes constituem uma progressão geométrica.
D) as raízes constituem uma progressão aritmética.
E) nenhuma raiz é real.

05. (UFMG) A soma de todas as raízes da equação $(x - 1)^2 - (x - 1)(x + 4) = (x - 1)(x + 1)$ é

A) −5 B) −2 C) 2 D) 5 E) 6

06. (UFMG) Se a equação $x^2 + px + q = 0$ admite raízes reais simétricas, então

A) $p = 1$ e $q = 0$
B) $p = 1$ e $q > 0$
C) $p = 1$ e $q < 0$
D) $p = 0$ e $q > 0$
E) $p = 0$ e $q < 0$

07. (FUVEST-SP) Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica $2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$ é igual a 1. Então, o valor de **k** é

A) −8
B) −4
C) 0
D) 4
E) 8

08. (UFRGS) Se os números −3, **a** e **b** são raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, então o valor de a + b é

A) −6
B) −2
C) −1
D) 2
E) 6

09. (Cesgranrio) Se as raízes da equação $x^2 + bx + 27 = 0$ são múltiplos positivos de 3, então o coeficiente **b** vale

A) 12
B) −12
C) 9
D) −9
E) 6

10. (FUVEST-SP) As três raízes de $9x^3 - 31x - 10 = 0$ são **p**, **q** e 2. O valor de $p^2 + q^2$ é

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{10}{9}$ C) $\frac{20}{9}$ D) $\frac{26}{9}$ E) $\frac{31}{9}$

11. (Cesgranrio) Se $x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$ tem uma raiz $x_1 = 1$, então as outras raízes da equação são

A) complexas não reais.
B) racionais.
C) positivas.
D) negativas.
E) reais de sinais opostos.

12. (UFU-MG–2009) Sabendo-se que os números reais não nulos, **a** e −a, são soluções da equação $3x^3 - 2x^2 + px + 1 = 0$, então, pode-se afirmar que

A) $p \geq 1$
B) $0 \leq p < 1$
C) $-1 \leq p < 0$
D) $p < -1$

SEÇÃO ENEM

01. O matemático Cardano, no século XVI, publicou o livro *Ars Magna*, no qual apresentava uma fórmula para resolver equações do tipo $x^3 + ax + b = 0$.

A fórmula era a seguinte:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{E}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{E}}, \text{ sendo } E = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

Acerca da equação $x^3 + 63x - 316 = 0$, podemos afirmar que

(Dado: $\sqrt{34\,225} = 185$)

A) possui uma raiz racional.
B) possui uma raiz irracional.
C) possui apenas raízes complexas.
D) não possui nenhuma raiz, real ou complexa.
E) possui três raízes idênticas.

02. Os números primos fascinam os matemáticos há séculos. Diversas tentativas já foram feitas para se determinar um polinômio gerador de números primos. Um desses polinômios, conhecido como polinômio de Goetgheluck, é dado por $P(x) = x^3 - 34x^2 + 381x - 1\,511$. Tal polinômio gera números primos para valores inteiros de **x**, variando de 0 até 25. Um dos números primos gerados é −1 163. Sabendo-se que o polinômio admite não somente valores inteiros para **x**, pode-se afirmar que o produto de todos os valores de **x**, para os quais $P(x) = -1\,163$, é

A) 1 511
B) −1 511
C) 381
D) −348
E) 348

GABARITO

Fixação

01. D
02. D
03. A
04. E
05. A

Propostos

01. D
02. D
03. E
04. C
05. A
06. E
07. A
08. B
09. B
10. D
11. A
12. D

Seção Enem

01. A
02. E